

1 Gruppen

Gruppe: Paar $(G, *)$ mit $*$: $G \times G \rightarrow G$ und (i) $*$ assoziativ; (ii) $\exists e$ neutral: $e * g = g * e = g$; (iii) $\forall g \exists h$ Linksinverse: $h * g = e$. Dann ist g^{-1} eindeutig und links = rechts. $|G| := \#G$. abelsch: $g * h = h * g$.
Untergruppe: $H \subseteq G$ ist UG von G : $\Leftrightarrow$ (i) $H \neq \emptyset$; (ii) $g, h \in H \Rightarrow g * h \in H$; (iii) $g \in H \Rightarrow g^{-1} \in H$. Dann ist $(H, *_H)$ Gruppe.

direktes Produkt: $(G \times G', \circ)$ mit $(g, g') \circ (h, h') := (g * h, g' * h')$; neutral (e, e') , $(g, g')^{-1} = (g^{-1}, g'^{-1})$.

semidir. Produkt: $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(H)$ Homo; $G \ltimes_{\rho} H := (G \times H, *_\rho)$, $(g, h) *_\rho (g', h') := (g * g', h \cdot \rho_g(h'))$. $\rho \equiv \text{id} \Rightarrow$ direktes Produkt.

Homomorphismus: $\varphi: (G, *) \rightarrow (G', *)$ mit $\varphi(g * h) = \varphi(g) *' \varphi(h)$. Dann $\varphi(e) = e'$, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$; $\ker \varphi$ ist UG von G , im φ ist UG von G' ; φ inj. $\Leftrightarrow \ker \varphi = \{e\}$. Iso: bijektiver Homo.

Verkettung: $\psi \circ \varphi$ ist Homo; Umkehrfunktion eines Iso ist Iso $\Rightarrow (\text{Aut}(G), \circ)$ ist Gruppe.

Konjugation: $c_g(h) := g * h * g^{-1}$; $c_g \in \text{Aut}(G)$.

Äquivalenzrelation: $\sim$ auf X : reflexiv, symmetrisch, transitiv. Äquivalenzklasse $[a] := \{b \in X : a \sim b\}$; die Klassen zerlegen X .

Linksnebenklasse: $aH := \{a * h : h \in H\}$. Mit $a \sim b : \Leftrightarrow a^{-1} * b \in H$ gilt $[a] = aH$. Quotient $G/H := \{aH \mid a \in G\}$, Projektion $\pi: G \rightarrow G/H$, $\pi(a) = aH = [a]$.

Normalteiler: H ist NT auf $G : \Leftrightarrow g * H * g^{-1} \subseteq H \forall g \in G$. Äquivalent: $[a] \cdot [b] := [a * b]$ ist auf G/H wohldefiniert. Quotientengruppe: G/H ist Gruppe gdw H NT ist; neutral $[e] = H$, $[a]^{-1} = [a^{-1}]$.

Homomorphiesatz: $\ker \varphi$ ist NT von G und $\bar{\varphi}: G/\ker \varphi \xrightarrow{\cong} \text{im } \varphi$, $[a] \mapsto \varphi(a)$, ist Iso.

Endliche Gruppen: $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (abelsch, Ord. n); S_n (Ord. $n!$); $D_n = \langle R, S \mid R^n = S^2 = e, SRS = R^{-1} \rangle$ (Ord. $2n$, Symmetriegr. des reg. n -Ecks); $Q_8 = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ mit $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = K$ (Ord. 8).

Matrixgruppe: UG von $(\text{GL}(n, \mathbb{K}), \bullet)$, $\bullet = \text{Matrixmult.}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$; $A^* := \bar{A}^T$. dim = reelle Dim.:

$\text{GL}(n, \mathbb{R})$	$\{\det A \neq 0\}$	n^2
$\text{GL}(n, \mathbb{C})$	$\{\det A \neq 0\}$	$2n^2$
$\text{SL}(n, \mathbb{R})$	$\ker \det$	$n^2 - 1$
$\text{SL}(n, \mathbb{C})$	$\ker \det$	$2n^2 - 2$
$\text{O}(n)$	$\{A^T A = \mathbb{1}\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\text{SO}(n)$	$\text{O}(n) \cap \text{SL}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\text{U}(n)$	$\{A^* A = \mathbb{1}\}$	n^2
$\text{SU}(n)$	$\text{U}(n) \cap \text{SL}$	$n^2 - 1$
$\text{O}(p, q)$	$A^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q}$	$\frac{m(m-1)}{2}, m=p+q \uparrow$
$\text{Sp}(2n)$	$A^* \Omega_{\text{st}} = \Omega_{\text{st}}$	$n(2n+1) \uparrow$

$$\langle v, w \rangle_{p,q} = \sum_1^p v_i w_i - \sum_{p+1}^{p+q} v_i w_i \quad (\text{Lorentz: } (1, 3)); \quad \Omega_{\text{st}}(v, w) = \sum_i (v_{2i-1} w_{2i} - v_{2i} w_{2i-1}).$$

k-Form: Abbildung $\varphi: V^k = V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$ (k Faktoren), V ein $\mathbb{K}$ -VR. (Für $k = 2$: bilinear / sesquilinear, nicht ausgeartet: $\varphi(v, \cdot) = 0 \Rightarrow v = 0$.)

Pullback: (Rückzug) von φ unter $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$$A^* \varphi := \varphi(A \cdot, \dots, A \cdot), \quad (A^* \varphi)(v_1, \dots, v_k) = \varphi(Av_1, \dots, Av_k).$$

Es gilt $\mathbb{1}^* \varphi = \varphi$ und $(AA^*)^* \varphi = A^* (A^* \varphi)$.

formerhaltende Gruppe: $G(\varphi) := \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid A^* \varphi = \varphi\}$ ist UG von $\text{GL}(n, \mathbb{K})$. Für φ reell bilinear & nicht ausgeartet: $G(\varphi) = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid A^* \varphi = \varphi\}$ (formerhaltend $\Rightarrow$ invertierbar). Bsp. $\text{O}(n) = G(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{st}})$, $\text{O}(p, q) = G(\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q})$, $\text{U}(n)$, $\text{Sp}(2n)$.

Polarisation: $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$, $q(v) = \langle v, v \rangle$: T erhält $q \Rightarrow T$ erhält $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Bsp.: $E(n) \cong \text{O}(n) \ltimes_{\rho} \mathbb{R}^n$, Poincaré $\cong \text{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$.

Gruppenwirkung: $\triangleright: G \times X \rightarrow X$ mit (i) $e \triangleright x = x \forall x$; (ii) $(g * h) \triangleright x = g \triangleright (h \triangleright x)$.

Satz (Wirkung $\leftrightarrow$ Homo): Die Zuordnung $\triangleright \mapsto \Phi_{\triangleright}, \Phi_{\triangleright}(g) := g \triangleright \cdot$, ist eine Bijektion

$$\{\text{Wirkungen von } G \text{ auf } X\} \leftrightarrow \{\text{Homos } G \rightarrow (S(X), \circ)\},$$

$S(X) = \text{Bijektionen } X \rightarrow X$. (Wirkung $\equiv$ "G permutiert X".)

Bahn: $Gx = \{g \triangleright x \mid g \in G\}$; die Bahnen zerlegen X (Klassen von $x \sim y : \Leftrightarrow \exists g : y = g \triangleright x$).

Stabilisator: $G_x = \{g \mid g \triangleright x = x\}$ ist UG von G .

Bahnsatz: $\psi_x: G/G_x \rightarrow Gx$, $aG_x \mapsto a \triangleright x$, ist wohldefiniert und bijektiv.

Bahnformel: G endlich: $|G| = |Gx| \cdot |G_x|$.

Lagrange: H UG von G endlich: $|G| = |G/H| \cdot |H|$.

Ordnung: $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$ teilt $|G|$; $g^{|G|} = e$.

Bézout: $\exists s, t \in \mathbb{Z} : ks + nt = \text{gcd}(k, n)$. Damit: $\langle \bar{k} \rangle = \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow \text{gcd}(k, n) = 1$.

Symmetriegruppe: $\text{Sym}(X) = \{\Phi \in E(n) \mid \Phi(X) = X\}$; $D_n = \text{Sym}(n\text{-Eck})$.

Bsp. Oktaedergruppe: $O_h = \text{Sym}(\text{Würfel})$: Bahn einer Ecke hat 8 Elemente, Stabilisator $\cong D_3$ (Ord. 6) $\Rightarrow |O_h| = 8 \cdot 6 = 48$.

Matrix-Liegruppe: Matrixgruppe $G \subseteq \text{GL}(n, \mathbb{K})$, die glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist.

Untermannigf. (Bausteine): d -dim. UVR von $\mathbb{R}^N$ ist d -dim. Untermannigf.; offene Teilmengen von $\mathbb{R}^N$ sind Untermannigf. voller

Dim. (so ist $\text{GL}(n, \mathbb{K}) = \det(\mathbb{K} \setminus 0)$ eine); Urbild $g^{-1}(c)$ mit Dg surjektiv darauf ist Untermannigf. mit $T_p M = \ker Dg(p)$.

Cartan: G (topologisch) abgeschlossen in $\text{GL}(n, \mathbb{K}) \Rightarrow$ Matrix-Liegruppe.

Kriterium: $f: \text{GL}(n, \mathbb{K}) \rightarrow V$ stetig, $C \subseteq V$ abgeschlossen mit $f^{-1}(C) = G \Rightarrow G$ abg. $\Rightarrow$ Matrix-Liegruppe. Ist G zusätzlich beschränkt, so ist G kompakt.

• $f(A) = A^* \varphi$, $C = \{\varphi\}$: formerhaltende Matrizen $G(\varphi)$ sind Matrix-Liegruppen ($\text{O}(n)$, $\text{O}(p, q)$, $\text{U}(n)$, Sp). • $f = \det$, $C = \{1\}$: $\text{SL}(n, \mathbb{K})$; Schnitte davon: SO , SU .

Gegenbsp. (keine Liegruppe) $\{(x) \mid x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$ ist Matrixgruppe, aber nicht abgeschlossen, also keine Matrix-Liegruppe.

Zusammenhang: γ Weg von x_0 nach x_1 : stetig, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Kette:

konvex $\Rightarrow$ sternförmig $\Rightarrow$ zusammenziehbar

$\Rightarrow$ einf. zshgd. $\Rightarrow$ wegzshgd. $\Rightarrow$ zshgd.

Für (Unter-)Mannigfaltigkeiten gilt wegzshgd. $\Leftrightarrow$ zshgd. $\Rightarrow$ bei Matrix-Liegruppen sagt man nur "zusammenhängend".

$G_0 := [e]_{\sim} = \text{Wegzshgs.komponente der Eins}$ ($a \sim b : \Leftrightarrow$ Weg in G von a nach b). Es gilt: G_0 ist NT von G , und $G/G_0 = \text{Menge der Zshgs.komponenten}$ (kanonisch eine Gruppe).

zusammenhängend: $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, $\text{SL}(n, \mathbb{K})$, $\text{U}(n)$, $\text{SU}(n)$, $\text{SO}(n)$, $\text{SU}(2) \cong S^3$, $\text{SO}^+(1, 3)$.

Konstruktion für $\text{U}(n)$: Spektralsatz $A = U \text{diag}(e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_n}) U^{-1}$; $M(t) := U \text{diag}(e^{it\phi_1}, \dots, e^{it\phi_n}) U^{-1}$ ist Weg in $\text{U}(n)$ von $\mathbb{1}$ nach A .

nicht zusammenhängend: $\text{O}(n)$: 2 Komp. $\{\det = \pm 1\}$, $\text{O}(n)_0 = \text{SO}(n)$, $\text{O}(n)/\text{SO}(n) \cong \{\pm 1\}$; $\text{GL}(n, \mathbb{R})$: 2 Komp.; $\text{O}(1, 3)$: 4 Komp., $\text{O}(1, 3)_0 = \text{SO}^+(1, 3)$.

2 Darstellungen von Gruppen

Darstellung: Paar (V, ρ) , $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ Homo; $\equiv$ lineare G -Wirkung. $\dim \rho := \dim V$.

Beispiele: trivial $\rho(g) = \text{id}$; Standard ($G \subseteq \text{GL}(n, \mathbb{K})$) $\rho(A)v = Av$; induziert auf $\mathbb{K}^X$ zu $G \triangleright X$: $(\rho_{\triangleright}(g)f)(x) = f(g^{-1} \triangleright x)$; regulär auf $\mathbb{C}^G$ (Basis $(\delta_h)_{h \in G}$, $\dim = |G|$): $(\rho_{\text{reg}}(g)f)(h) = f(g^{-1}h)$, äquiv. $\rho_{\text{reg}}(g)\delta_h = \delta_{g * h}$.

Homo/Äquivalenz: $\text{Hom}_G(V, V') = \{T \text{ linear} \mid T\rho(g) = \rho'(g)T \forall g\}$; $\rho \cong \rho' : \Leftrightarrow \exists \text{ bijektives } T \in \text{Hom}_G$.

invarianter UR: $W \subseteq V$ UVR mit $\rho(g)W \subseteq W \forall g$. Unterdarstellung $\rho_W(g) := \rho(g)|_W$.

irreduzibel: $V \neq \{0\}$ und $\{0\}, V$ sind die einzigen inv. UR.

vollst. reduzibel: $\exists$ Zerlegung $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ in inv. UR mit alle ρ_{V_i} irreduzibel.

Hilfssatz 2.13: Existiert zu jedem inv. $W \subseteq V$ ($\dim V < \infty$) ein inv. W' mit $V = W \oplus W'$, so ist (V, ρ) vollst. reduzibel. (Hinreichen des Kriterium.)

unitär: $\rho(g)$ unitär $\forall g \Leftrightarrow \rho(g^{-1}) = \rho(g)^* \Leftrightarrow$ das SP ist ρ -invariant.

Satz: unitär $\Rightarrow$ vollst. reduzibel (nimm $W' = W^\perp$, dann 2.13).

Unitarisierung: G endlich: $\langle v, w \rangle := \sum_{g \in G} \langle \rho_g v, \rho_g w \rangle_0$ ist ρ -

invariantes SP.

Maschke: Jede endl.dim. komplexe Darst. einer endlichen Gruppe ist vollst. reduzibel.

Schur: ρ, ρ' irred., endl.dim., komplex: (i) $T \in \text{Hom}_G(V, V') \Rightarrow T = 0$ oder T Iso; (ii) $T \in \text{Hom}_G(V, V) \Rightarrow T = \lambda \text{id}$.

Kor.: Irred. komplexe Darst. einer abelschen Gruppe ist 1-dim.

Std. von S_n : $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}(1, \dots, 1) \oplus \{x \mid \sum x_i = 0\} = \text{triv} \oplus \text{Std}$; Std ist irreduzibel, $\dim = n - 1$.

Gegenbsp. (nicht vollst. red.) $G = \mathbb{Z}$ (unendlich), $\rho(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{C}^2$: $W = \mathbb{C} \times \{0\}$ inv., kein inv. Komplement ($\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht diagbar.) $\Rightarrow$ Maschke braucht $|G| < \infty$.
Gegenbsp. (Schur braucht $\mathbb{C}$) $\text{SO}(2)$ abelsch, Standarddarst. auf $\mathbb{R}^2$ ist reell irreduzibel, 2-dim. Über $\mathbb{C}$ zerfällt sie in $z \mapsto e^{\pm i\varphi} z$.

3 Charaktertheorie (G endlich)

Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^G$: (Summe über *alle* $g \in G$, bzw. über die Klassen $C_1, \dots, C_k$ mit Gewicht $|C_p|$):

$$(f, f') = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{f'(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{p=1}^k |C_p| f(C_p) \overline{f'(C_p)}.$$

Orthog. Matricelemente: ρ, ρ' irred. unitär (ONB), Summe über $g \in G$: $(\rho_{ji}, \rho'_{j'i'}) = 0$ falls $\rho \not\cong \rho'$, und $(\rho_{ji}, \rho_{j'i'}) = \frac{1}{\dim V} \delta_{ii'} \delta_{jj'}$. Die $\rho_{\ell, ji}$ bilden eine orthogonale Basis von $\mathbb{C}^G$.

Charakter: $\chi_\rho = \text{tr} \circ \rho : G \rightarrow \mathbb{C}$: (i) Klassenfkt. $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$; (ii) $\rho \cong \rho' \Rightarrow \chi_\rho = \chi_{\rho'}$; (iii) $\chi_\rho(e) = \dim V$; (iv) $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$; (v) $\chi_{\rho \otimes \rho'} = \chi_\rho \chi_{\rho'}$; (vi) $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.

Orthog. der Charaktere: ρ, ρ' irred.: $(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = 1$ falls $\rho \cong \rho'$, sonst 0.

vollst. Liste: $(\rho_\ell)_{\ell=1}^k$: paarweise inäquivalent und jede irred. Darst. ist zu einem ρ_ℓ äquivalent. Schreibe $\chi_\ell := \chi_{\rho_\ell}$.

Vielfachheit: von ρ_ℓ in ρ (unabh. von der Zerlegung):

$$m_\ell = (\chi_\rho, \chi_\ell) = \frac{1}{|G|} \sum_{p=1}^k |C_p| \chi_\rho(C_p) \overline{\chi_\ell(C_p)} \in \mathbb{N}_0,$$

$$\rho \cong \bigoplus_{\ell} \rho_{\ell}^{\oplus m_{\ell}}, \text{ Kontrolle } \sum_{\ell} m_{\ell} \dim \rho_{\ell} = \dim V.$$

Konjugationsklasse: $\text{Cl}(a) = \{gag^{-1} \mid g \in G\}$ = Bahn von a unter Konjugationswirkung; die Klassen zerlegen G .

Klassenfunktion: $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ konstant auf jeder Konj.klasse. Die χ_ℓ bilden eine ONB des Raums der Klassenfunktionen; insbes. ist jede Klassenfunktion Linearkombination der Charaktere.

Fundamentalsatz: $\#\{\text{irred. Darst.}\} / \cong = \#\{\text{Konj.klassen}\} = k$.

reguläre Darstellung: $\mathbb{C}^G$, $\rho_{\text{reg}}(g)\delta_h = \delta_{gh}$, Permutationsdarst. zur Linkstranslation. $\chi_{\text{reg}}(e) = |G|$, $\chi_{\text{reg}}(g) = 0$ für $g \neq e$ (kein Fixpunkt).

$$\begin{aligned} \rho_{\text{reg}} &\cong \bigoplus_{\ell=1}^k (\dim \rho_{\ell}) \cdot \rho_{\ell}, & \chi_{\text{reg}} &= \sum_{\ell} (\dim \rho_{\ell}) \chi_{\ell}, \\ &\Rightarrow \sum_{\ell=1}^k (\dim \rho_{\ell})^2 = |G|. \end{aligned}$$

Also: jede irred. Darst. kommt in ρ_{reg} vor, und zwar $\dim \rho_{\ell}$ -mal. ρ_{reg} "enthält alle Information" über G . ρ_{reg} -invariante UR sind genau die $\mathbb{C}[G] * c$, $c \in \mathbb{C}[G]$ (Gruppenalgebra, Teil 4).

isotypische Komponente: Sei $(U_i)_{i=1}^n$ eine Zerlegung von V in irred. inv. UR. Für $\ell = 1, \dots, k$:

$$W_{\ell} := \sum \{U_i \mid \rho_{U_i} \sim \rho_{\ell}\}$$

= Menge der Summen von Vektoren in U_i für i so, dass $\rho_{U_i} \sim \rho_{\ell}$. Dann $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ (kanonische Zerlegung), $(W_{\ell}, \rho_{W_{\ell}}) \sim \rho_{\ell}^{\oplus n_{\ell}}$.

Projektion: $p_{\ell} = \frac{\dim V_{\ell}}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\ell}(g)} \rho(g)$, $W_{\ell} = \text{im } p_{\ell}$. Die W_{ℓ} sind *eindeutig*, die Zerlegung von W_{ℓ} in irred. U_i *nicht*.

Charaktertafel: $k \times k$ -Matrix $\chi_{\ell}(C_p)$; Zeile 1 = triv, Spalte 1 = $[e]$ (Einträge $\dim \rho_{\ell}$).

$$\text{Zeilen (Summe über Klassen } p) : \sum_{p=1}^k \frac{|C_p|}{|G|} \chi_{\ell}(C_p) \overline{\chi_m(C_p)} = \delta_{\ell m}$$

$$\text{Spalten (Summe über irreps } \ell) : \sum_{\ell=1}^k \chi_{\ell}(C_p) \overline{\chi_{\ell}(C_q)} = \frac{|G|}{|C_p|} \delta_{pq}$$

Insbes. $\sum_{\ell} |\chi_{\ell}(g)|^2 = |G|/|\text{Cl}(g)| = |Z_G(g)|$.

Bsp. S_3 : $|G| = 6$, $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$:

S_3	$[e]$	(1)	[(12)]	(3)	[(123)]	(2)
χ_{triv}	1		1		1	
χ_{sgn}	1		-1		1	
χ_{Std}	2		0		-1	

Bsp. $\mathbb{Z}_n$: abelsch, $\zeta = e^{2\pi i/n}$: n irred., alle 1-dim, $\rho_k(\bar{a}) = \zeta^{ak}$, Tafel = $(\zeta^{ak})_{k,a}$.

Bsp. D_n : $\zeta = e^{2\pi i/n}$; 1-dim: $\rho^{\delta\varepsilon}(R^a S^b) = (-1)^{\delta a + \varepsilon b}$; 2-dim: $\rho_{\ell}(R^a) = \begin{pmatrix} \zeta^{\ell a} & 0 \\ 0 & \zeta^{-\ell a} \end{pmatrix}$, $\rho_{\ell}(R^a S) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta^{\ell a} \\ \zeta^{-\ell a} & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_{\rho_{\ell}}(R^a) = 2 \cos \frac{2\pi \ell a}{n}$, $\chi_{\rho_{\ell}}(R^a S) = 0$; $\rho_{\ell} \cong \rho_{n-\ell}$.

• n ungerade: $k = \frac{n+3}{2}$ Klassen $\{e\}$, $\{R^{\pm a}\}$ für $a = 1.. \frac{n-1}{2}$, alle Spiegelungen). Irreps: 2 Stück 1-dim ($\delta = 0$, $\varepsilon = 0, 1$), $\frac{n-1}{2}$ Stück 2-dim ($\ell = 1.. \frac{n-1}{2}$). Check $1 + 1 + 4 \cdot \frac{n-1}{2} = 2n$.

• n gerade: $k = \frac{n}{2} + 3$ Klassen $\{e\}$, $\{R^{n/2}\}$, $\{R^{\pm a}\}$, *zwei* Spiegelungsklassen). Irreps: 4 Stück 1-dim, $\frac{n}{2} - 1$ Stück 2-dim ($\ell = 1.. \frac{n}{2} - 1$; $\ell = 0, \frac{n}{2}$ sind reduzibel). Check $4 + 4(\frac{n}{2} - 1) = 2n$.

Bsp. Q_8 und D_4 : (beide Ord. 8, 5 Klassen, dim 1, 1, 1, 1, 2; Q_8 -Klassen $\{\mathbb{1}\}, \{-\mathbb{1}\}, \{\pm I\}, \{\pm J\}, \{\pm K\}$):

	(1)	(1)	(2)	(2)	(2)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

Bsp. S_4 : $|G| = 24$, $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24$:

S_4	$ C_p $	e	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
χ_{triv}	1	1		1		1
χ_{sgn}	1	-1		1		-1
χ_2	2	0		2		-1
χ_{Std}	3	1		-1		0
$\chi_{\text{Std} \otimes \text{sgn}}$	3	-1		-1		0

Dim. von Hom_G : $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(V, V') = (\chi_V, \chi_{V'})^{\dagger}$; V irred.: $\dim \text{Hom}_G(V, V) = 1$ (Schur).

Gegenbsp. (χ ist kein Homo) $\chi_{\rho}(gh) \neq \chi_{\rho}(g)\chi_{\rho}(h)$ i. A. (tr ist kein Homo).

Gegenbsp. (χ bestimmt ρ nur bis $\cong$) $\chi_{\rho} = \chi_{\rho'} \Rightarrow \rho \cong \rho'$ gilt nur für vollst. red. Darst. (für $|G| < \infty$ also stets).

4 Symmetrische Gruppe S_n

Tupelschreibweise: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, kurz $\sigma = (3, 1, 4, 2)$ (untere Zeile = Bilder).

Zyklenschreibweise: $\sigma = (1\ 3\ 4\ 2)$: $1 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$; Fixpunkte weglassen. Jede σ ist Produkt *disjunkter* Zyklen, eindeutig bis auf Reihenfolge.

Verknüpfung: $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$ (rechts zuerst!). Bsp. $\sigma = (1\ 2\ 3)$, $\tau = (1\ 2)$: $\sigma\tau(1) = \sigma(2) = 3$, $\sigma\tau(2) = \sigma(1) = 2$, $\sigma\tau(3) = \sigma(3) = 1 \Rightarrow \sigma\tau = (1\ 3)$; analog $\tau\sigma = (2\ 3)$. Also $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

Konjugation: $\sigma(a_1\ a_2 \dots a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2) \dots \sigma(a_k))$: konjugieren = Einträge umbenennen. Daher

$$\tau \sim \tau' \Leftrightarrow \text{gleicher Zyklentyp},$$

$$\{\text{Konj.klassen von } S_n\} \leftrightarrow \{\text{Partitionen von } n\}.$$

Anzahl = $p(n)$; $p(1..10) = 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42$.

Klassengrösse: bei m_i Zyklen der Länge i : $|C_{\lambda}| = \frac{n!}{\prod_i i^{m_i} m_i!}$ (Bahnformel).

Vorzeichen: $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n - \#\text{Zyklen}}$; k -Zyklus: $\text{sgn} = (-1)^{k-1}$. $\text{ord}(\sigma) = \text{kgV der Zykluslängen}$.

K -Algebra: $\mathbb{K}$ -VR A mit *bilinearer* Verknüpfung $\cdot : A \times A \rightarrow A$. Bsp. $(\mathbb{K}^{n \times n}, \bullet)$: assoziativ, Eins $\mathbb{1}$, für $n \geq 2$ nicht kommutativ.

$K[S]$: $= \{a : S \rightarrow K \mid a_s \neq 0 \text{ für nur endlich viele } s\}$ mit Basis $(\delta_s)_{s \in S}$, $\delta_s(t) = \delta_{st}$.

Gruppenalgebra: $(K[G], *)$ mit *Faltung*

$$(a * b)_g := \sum_{h,k \in G: hk=g} a_h b_k \implies \delta_g * \delta_h = \delta_{g*h}.$$

Assoziativ, Eins δ_e ; kommutativ $\Leftrightarrow G$ abelsch. Jedes $a \in K[G]$ ist $a = \sum_g a_g \delta_g$.

Partition: $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r)$, $\sum \lambda_i = n$; *Young-Diagramm*: λ_i Kästchen in Zeile i . *Young-Tableau*: Diagramm mit $1, \dots, n$ befüllt. **Symmetrisierer:** R_{λ} Zeilenstabilisator, C_{λ} Spaltenstabilisator des Tableaus; in $\mathbb{C}[S_n]$:

$$s_{\lambda} := \sum_{\sigma \in R_{\lambda}} \delta_{\sigma}, \quad a_{\lambda} := \sum_{\tau \in C_{\lambda}} \text{sgn}(\tau) \delta_{\tau}, \quad c_{\lambda} := s_{\lambda} * a_{\lambda}.$$

$V_\lambda := \mathbb{C}[S_n] * c_\lambda$ ist ρ_{reg} -invariant, $\rho_\lambda := (\rho_{\text{reg}})_{V_\lambda}$.
Satz: ρ_λ ist irreduzibel; $\lambda \neq \lambda' \Rightarrow \rho_\lambda \not\cong \rho_{\lambda'}$; $(\rho_\lambda)_\lambda$ ist vollständige Liste. $\rho_{(n)} = \text{triv}$, $\rho_{(1, \dots, 1)} = \text{sgn}$, $\rho_{(n-1, 1)} = \text{Std}$.
Hakenlängenformel: $h_\lambda(\ell, i) = \#$ Kästchen im Haken (rechts + unten, inkl. selbst):

$$\dim \rho_\lambda = \frac{n!}{\prod_{\ell, i} h_\lambda(\ell, i)}$$

5 SU(2), SO(3) und Lorentzgruppe

$SU(2) \cong S^3$: $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.
 $H_0 := \{\text{herm. spurfreie } 2 \times 2\text{-Matrizen}\}$, $\dim_{\mathbb{R}} = 3$; Frobenius-SP $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(XY)$.
Pauli: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sind ONB von H_0 ; $\sigma_j^2 = \mathbb{1}$, $\sigma_j \sigma_{j+1} = i \sigma_{j-1}$ (Index mod 3).
Hut / Anti-Hut: $\wedge: \mathbb{R}^3 \rightarrow H_0$, $\hat{x} := \sum_{j=1}^3 x_j \sigma_j = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$ ist ein orthogonaler Iso (bzgl. $\langle, \rangle_{\text{st}}$ und $\langle, \rangle$); $\text{Anti-Hut} \tilde{\cdot} := \wedge^{-1}: H_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$, d.h. $\tilde{X}$ ist der Koordinatenvektor von X bzgl. $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.
Iso $SO(H_0) \rightarrow SO(3)$: $\psi(T) := \tilde{\circ} \circ T \circ \wedge$, d.h.

$$\psi(T)x = (T\hat{x})^\vee : \text{Matrix von } T \text{ bzgl. } (\sigma_j).$$

ψ ist ein Gruppen-isomorphismus (nutzt $\det(\Phi L \Phi^{-1}) = \det L$).
Überlagerung: $\rho: SU(2) \rightarrow SO(H_0)$, $\rho(A)X = AXA^*$ (wohl-def.: AXA^* herm. spurfrei; orthogonal wegen Zyklizität der Spur).
 $\varphi := \psi \circ \rho: SU(2) \rightarrow SO(3)$, explizit

$$\varphi(A)x = (A\hat{x}A^*)^\vee,$$

surjektiv, $\ker \varphi = \{\pm \mathbb{1}\}$: doppelte Überlagerung, also

$$SU(2)/\{\pm \mathbb{1}\} \cong SO(3).$$

Fortsetzung auf $SL(2, \mathbb{C})$: $H = \{\text{herm. } 2 \times 2\}$, $\wedge: \mathbb{R}^4 \rightarrow H$, $\hat{x} = x^0 \mathbb{1} + \sum_j x^j \sigma_j$; $\det \hat{x} = (x, x)_{1,3}$ ist die Minkowski-Form, invariant unter $X \mapsto AXA^*$ für $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Mit $\varphi_A(x) = (A\hat{x}A^*)^\vee$:

$$SL(2, \mathbb{C})/\{\pm \mathbb{1}\} \cong SO^+(1, 3), \quad \ker = \{\pm \mathbb{1}\}.$$

Lorentzgruppe: $O(1, 3) = \{\Lambda \mid \Lambda^T g \Lambda = g\}$, $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$; orthochron: $\Lambda_0^0 > 0$; $SO^+(1, 3) = \{\text{orthochron, det} = 1\}$. $\Lambda \in O(1, 3) \Leftrightarrow$ Spalten sind $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,3}$ -orthonormiert.
Satz: (i) Λ orthochron $\Leftrightarrow \Lambda(Z_+) = Z_+$ (Vorwärtskegel $Z_+ = \{(x, x) > 0, x^0 > 0\}$); (ii) $O^+(1, 3), SO^+(1, 3)$ sind UG; (iii) $SO^+(1, 3) = O(1, 3)_0$.

6 Lie-Algebren

Frobeniusnorm: $\|X\| := \left(\sum_{i,j} |x_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(X^* X)}$; submultiplikativ $\|XY\| \leq \|X\| \|Y\| \Rightarrow$ Exp-Reihe konvergiert absolut.

Matrixexponential: $\text{Exp}(X) = \sum_{k \geq 0} \frac{X^k}{k!}$. (i) $XY = YX \Rightarrow$

$\text{Exp}(X+Y) = \text{Exp } X \text{ Exp } Y$; (ii) $\text{Exp}(X)^{-1} = \text{Exp}(-X)$; (iii) $\text{Exp}(AXA^{-1}) = A \text{Exp}(X) A^{-1}$; (iv) $\det \text{Exp } X = e^{\text{tr } X}$; (v) $\text{Exp}(X^*) = (\text{Exp } X)^*$; (vi) $D \text{Exp}(0) = \text{id}$, also lokaler Diffeo bei 0 mit Inverser Log.

Gegenbsp. (Exp nicht injektiv) $\text{Exp}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2\pi k \\ 2\pi k & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$; Exp ist nur lokal bei 0 ein Diffeo.

Bsp. Exp: (jeweils die Rechenmethode):

$$\begin{array}{ll} \text{diagonal} & \text{Exp diag}(\lambda_i) = \text{diag}(e^{\lambda_i}) \\ \text{diagbar.} & A = SDS^{-1} \Rightarrow \text{Exp } A = S(\text{Exp } D)S^{-1} \\ \text{nilpotent} & N^m = 0 \Rightarrow \text{Exp } N = \sum_{k < m} \frac{N^k}{k!} \\ \text{Drehung} & \text{Exp} \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ & X^2 = -\mathbb{1} \quad \text{Exp}(\theta X) = \cos \theta \mathbb{1} + \sin \theta X \\ & (\text{z. B. } X = i \sum n_j \sigma_j, \quad n \in S^2) \end{array}$$

Log-Reihe: $\|Y - \mathbb{1}\| < 1$: $\text{Log } Y = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (Y - \mathbb{1})^k$.

Einparametergruppe: C^1 -Homo $A: (\mathbb{R}, +) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$. Bijektion $\mathbb{K}^{n \times n} \leftrightarrow \{\text{Einparametergr.}\}$, $X \mapsto A_X(t) = \text{Exp}(tX)$;

$$\dot{A} = X_A A = AX_A, \quad X_A = \dot{A}(0).$$

Lie-Klammer: $[\cdot, \cdot]: A \times A \rightarrow A$ mit (i) bilinear; (ii) schiefsymmetrisch $[X, X] = 0$; (iii) Jacobi $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.
Achtung: i. A. nicht assoziativ, $[[X, Y], Z] \neq [X, [Y, Z]]$.

Lie-Algebra: Paar $(A, [\cdot, \cdot]): \mathbb{K}$ -VR A mit Lie-Klammer. Lie-Unteralgebra: UVR, abgeschlossen unter $[\cdot, \cdot]$.

L.-Alg.-Homomorphismus: lineares $f: A \rightarrow A'$ mit $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$; bijektiv $\Rightarrow$ Iso.

Kommutator: $[X, Y] = XY - YX$ ist Lie-Klammer auf $\mathbb{K}^{n \times n}$ (bzw. $[S, T] = ST - TS$ auf $\text{End } V$).

Ableitung: M, N Untermannigf., $f: M \rightarrow N$, $x_0 \in M$, $X \in T_{x_0} M$: wähle Weg γ in M mit $\gamma(t_0) = x_0$, $\dot{\gamma}(t_0) = X$; dann

$$Df(x_0)X := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} f(\gamma(t)) \in T_{f(x_0)} N$$

(unabhängig von γ), linear. Kettenregel $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$; f linear $\Rightarrow Df(x) = f$.

Bsp. Ableitungen: $D \det(A)X = \det(A) \text{tr}(A^{-1}X)$, speziell $D \det(\mathbb{1}) = \text{tr}$; Inversion $I(A) = A^{-1}$: $DI(A)X = -A^{-1}XA^{-1}$, $DI(\mathbb{1})X = -X$; $g(A) = A^T A$: $Dg(\mathbb{1})X = X + X^T$; $g(A) = A^* A$: $Dg(\mathbb{1})X = X + X^*$; $D \text{Exp}(0) = \text{id}$.

LieG: $:= (T_1 G, [\cdot, \cdot])$, reelle Lie-Algebra; $T_1 G = \{\dot{x}(0) \mid x \text{ Weg in } G, x(0) = \mathbb{1}\}$, $\dim_{\mathbb{R}} \text{Lie } G = \dim G$. Abgeschlossenheit: $X, Y \in T_1 G \Rightarrow [X, Y] \in T_1 G$ (darum überhaupt Lie-Algebra).

Berechnung: $X \in \text{Lie } G \Leftrightarrow \text{Exp}(tX) \in G$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (Bedingung hinschreiben, bei $t = 0$ nach t ableiten); ist $G = g^{-1}(c)$ mit $Dg(\mathbb{1})$ surjektiv, so $\text{Lie } G = \ker Dg(\mathbb{1})$.

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$	$\mathbb{K}^{n \times n}$	n^2 ($\mathbb{R}$), $2n^2$ ($\mathbb{C}$)
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$	$\{\text{tr } X = 0\}$	$n^2 - 1$
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$	$\{\text{tr } X = 0\}$	$2n^2 - 2$
$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$	$\{X^T = -X\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\mathfrak{u}(n)$	$\{X^* = -X\}$	n^2
$\mathfrak{su}(n)$	$\{X^* = -X, \text{tr } X = 0\}$	$n^2 - 1$
$\mathfrak{sp}(2n)$	$\{X^T \Omega + \Omega X = 0\}$	$n(2n+1)^+$

$\mathfrak{so}(3) \cong (\mathbb{R}^3, \times)$: Das Kreuzprodukt ist eine Lie-Klammer, und $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ mit $\Phi(x)y = x \times y$ ist ein Lie-Algebren-Iso.

Basis von $\mathfrak{su}(2)$: $t_j := i \sigma_j$ (anti-herm., spurfrei), $[t_i, t_j] = -2\varepsilon_{ijk} t_k$, z. B. $[t_1, t_2] = -2t_3$.

Basis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$: $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Rückweg $\mathfrak{g} \rightarrow G$: $\text{Exp}(\mathfrak{g}) \subseteq G$, und Exp ist bei 0 eine glatte Einbettung (liefert Umgebung von $\mathbb{1}$ in G). Ferner

$$G_0 = \{\text{Exp}(X_1) \cdots \text{Exp}(X_k) \mid k \in \mathbb{N}_0, X_i \in \mathfrak{g}\},$$

also bestimmt $\mathfrak{g}$ nur die Zusammenhangskomponente der Eins. $\text{Exp}: \mathfrak{g} \rightarrow G_0$ ist surjektiv für kompakte G (und für $U(n), GL(n, \mathbb{C})$).

Gegenbsp. (Exp nicht surjektiv) $SL(2, \mathbb{R})$ ist zshgd., aber $\text{diag}(c, c^{-1}) \notin \text{Exp}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ für $c \in (-1, 0)$.

BCH (3. Ordnung):

$$\text{Log}(\text{Exp } X \text{ Exp } Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$$

$$+ \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + \frac{1}{12}[Y, [Y, X]] + O(\|\cdot\|^4).$$

7 Darstellungen von Liegruppen

Darstellung: $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ Homo, glatt, $\dim V < \infty$. Für Homo von Liegruppen: stetig $\Leftrightarrow$ glatt.

Darst. einer Lie-Algebra: Paar (V, τ) , $\tau: A \rightarrow \text{End } V$ $\mathbb{K}$ -linear mit $[\tau(X), \tau(Y)] = \tau([X, Y])$. Invarianz, Irreduzibilität, vollst. Reduzibilität wie bei Gruppen.

U(1): $\rho_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$: vollständige Liste der irred. Darst.

SU(2): $V_n = \{\text{homogene Polynome vom Grad } n \text{ in } z_1, z_2\}$, $\dim V_n = n + 1$, $\rho_n(A)p := p(A^{-1} \cdot)$. $(V_n, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist die vollständige Liste der irred. Darst.

herm. SP (Satz 7.9(ii)): $\langle, \rangle_n$ ist das eindeutige hermitesche SP auf V_n , bzgl. dessen die Vektoren

$$z \mapsto \frac{z_1^m z_2^{n-m}}{\sqrt{m!(n-m)!}}, \quad m = 0, \dots, n,$$

orthonormal sind; bzgl. $\langle, \rangle_n$ ist ρ_n unitär (bis auf positive Konstante eindeutig).

Physik: Spin $s = n/2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$, Spinzustand = komplexe Gerade in V_{2s} ; $\rho_n(-A) = (-1)^n \rho_n(A)$.

SO(3): Für *gerades* n faktorisiert ρ_n über φ : $\bar{\rho}_n(R) := \rho_n(A)$ für $A \in \varphi^{-1}(R)$ (wohldef., da $\varphi^{-1}(R) = \{\pm A\}$ und $\rho_n(-A) = \rho_n(A)$). $(V_n, \bar{\rho}_n)_{n \text{ gerade}}$ ist die vollständige Liste der irred. Darst. von $\text{SO}(3)$; Dimensionen $n+1$ *ungerade*, zu jedem ungeraden m genau eine.

Induzierter Homo: $\varphi_* := D\varphi(\mathbb{1}) : \text{Lie } G \rightarrow \text{Lie } G'$ ist ein *Lie-Algebren-Homo*. $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } V$ ist Lie-Alg.-Darstellung (Standarddarst.: $\rho_*(X)v = Xv$).

Adjungiert: $\text{Ad}(A) := Dc_A(\mathbb{1}) = C_A|_{\mathfrak{g}} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$, $C_A(Y) = AY A^{-1}$; $\text{ad} := \text{Ad}_*$, $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$.

Exp vertauscht:

$$\varphi \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ \varphi_*,$$

$$\varphi(\text{Exp } X_1 \cdots \text{Exp } X_k) = \text{Exp}(\varphi_* X_1) \cdots \text{Exp}(\varphi_* X_k).$$

Eindeutigkeit (7.17(ii)): G wegzshgd.: $\varphi_* = \psi_* \Rightarrow \varphi = \psi$. Induzierte gleich $\Rightarrow$ die Homos selbst gleich (folgt aus G_0 -Erzeugung).

Hilfssatz 7.24: G wegzshgd.: $W \subseteq V$ ist ρ -invariant $\Leftrightarrow \rho_*$ -invariant.

Satz 7.23: G wegzshgd.: (i) ρ irred. $\Leftrightarrow \rho_*$ irred.; (ii) ρ vollst. red. $\Leftrightarrow \rho_*$ vollst. red.

Komplexifizierung: Jedes $Z \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ hat eine *eindeutige* Zerlegung $Z = X + iY$ mit $X, Y \in \mathfrak{su}(n)$. Für komplexe Darst. τ von $\mathfrak{su}(n)$ ist $\tau_{\mathbb{C}}(Z) := \tau(X) + i\tau(Y)$ komplex-linear auf $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, und τ irred. $\Leftrightarrow \tau_{\mathbb{C}}$ irred. Brücke: $\text{SU}(2) \rightsquigarrow \mathfrak{su}(2) \rightsquigarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -Darst.: $H = \tau(h), E = \tau(e), F = \tau(f) \leftrightarrow$ Tripel mit $[H, E] = 2E, [H, F] = -2F, [E, F] = H$. Höchstes Gewicht λ , $v_k = F^k v_0$:

$$Hv_k = (\lambda - 2k)v_k, \quad Ev_0 = 0,$$

$$Ev_k = k(\lambda - k + 1)v_{k-1}, \quad Fv_k = v_{k+1}.$$

Klassifikation: Auf $\mathbb{C}^{n+1}$ mit Basis $e_0, \dots, e_n$:

$$H_n e_k = (n - 2k)e_k, \quad E_n e_k = k(n + 1 - k)e_{k-1},$$

$$F_n e_k = e_{k+1} \ (k < n), \quad E_n e_0 = 0, \ F_n e_n = 0.$$

τ_n irreduzibel, $\dim = n + 1$; $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ vollständige Liste der irred. komplex-linearen Darst. Gegenbsp. ($\mathfrak{g}$ bestimmt G nicht) $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$, aber $\text{SU}(2) \not\cong \text{SO}(3)$; ebenso $\text{Lie } \text{O}(n) = \text{Lie } \text{SO}(n)$, da $\text{SO}(n) = \text{O}(n)_0$. *Konsequenz:* ρ_n faktorisiert über $\text{SO}(3) \Leftrightarrow \rho_n(-\mathbb{1}) = \text{id} \Leftrightarrow n$ gerade; halbzahliger Spin lebt nur auf $\text{SU}(2)$.

8 Lineare Algebra & nützliche Formeln

injektiv/surjektiv: $f : X \rightarrow Y$ *injektiv* $:\Leftrightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$; *surjektiv* $:\Leftrightarrow \forall y \exists x : f(x) = y$; *bijektiv* = beides. Bsp. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv ($2\pi i$ -periodisch); $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist bijektiv.

EW/EV: $Av = \lambda v, v \neq 0$. $\text{tr } A = \sum \lambda_i, \det A = \prod \lambda_i$ (mit Vielfachheit). Ähnliche Matrizen ($A' = SAS^{-1}$) haben gleiche EW, tr, det. EV zu *verschiedenen* EW sind linear unabhängig; n verschiedene EW $\Rightarrow$ diagbar. A diagbar. $\Leftrightarrow$ es gibt eine Basis aus EV $\Leftrightarrow A = SDS^{-1}$; dann $A^k = SD^k S^{-1}, \text{Exp } A = S(\text{Exp } D)S^{-1}$. λ EW von $A \Rightarrow e^\lambda$ EW von $\text{Exp } A$.

Spektralsatz (C): $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *normal* ($AA^* = A^*A$) $\Leftrightarrow A$ ist *unitär diagonalisierbar* ($A = UDU^*$, ONB aus EV). Spezialfälle: A hermitesch ($A^* = A$) $\Rightarrow$ EW reell; A unitär $\Rightarrow$ EW auf S^1 ; A antiherm. $\Rightarrow$ EW rein imaginär.

Spektralsatz (R): $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *symmetrisch* $\Leftrightarrow$ orthogonal diagonalisierbar ($A = ODO^T, D$ reell). $A \in \text{SO}(n)$: Blockdiagonalform aus Drehblöcken $R(\varphi)$ und 1 'en.

$$\text{Inverse } 2 \times 2: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Umkehrsat: $Df(p)$ invertierbar $\Rightarrow f$ lokaler Diffeo bei p (angewandt auf Exp bei 0).

Spur: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \text{tr}(SAS^{-1}) = \text{tr } A \Rightarrow \chi_\rho$ Klassenfkt.; $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr } A \cdot \text{tr } B$.

Tensor/Summe: $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W, \dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W, \dim(V/W) = \dim V - \dim W, |G/H| = |G|/|H|$.

Einheitswurzeln: $\zeta = e^{2\pi i/n} : \sum_{a=0}^{n-1} \zeta^{ak} = n$ falls $n \mid k$, sonst 0 (geom. Summe). Das ist die Orthogonalität für $\mathbb{Z}_n$.

Geom. Reihe: $\sum_{k=0}^{m-1} q^k = \frac{q^m - 1}{q - 1} \ (q \neq 1); \sum_{k \geq 0} q^k = \frac{1}{1 - q} \ (|q| < 1)$.

Homogene Polynome: Grad d in $z_1, \dots, z_m$: Basis $z^\alpha, |\alpha| = d, \dim = \binom{d + m - 1}{m - 1}$; für $m = 2$: $\dim = d + 1$.

Pascal: Zeile n , Eintrag $k = 0, \dots, n$ ist $\binom{n}{k}$; $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

$$\begin{array}{r} n=0 | 1 \\ 1 | 1 \ 1 \\ 2 | 1 \ 2 \ 1 \\ 3 | 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 4 | 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\ 5 | 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1 \\ 6 | 1 \ 6 \ 15 \ 20 \ 15 \ 6 \ 1 \end{array}$$

Permutationsdarst.: $G \triangleright X$ endlich, $V = \mathbb{C}^X$: $\chi_\rho(g) = |\text{Fix}(g)|$ (Diagonaleinträge der Permutationsmatrix). Bsp. $S_n \triangleright \{1..n\}$: $(\chi, \chi_{\text{triv}}) = 1 \Rightarrow \mathbb{C}^n = \text{triv} \oplus \text{Std}$.

Zentralisator/Zentrum: $Z_G(a) = G_a$ (Stab. bzgl. Konjugation) $\Rightarrow |\text{Cl}(a)| = |G|/|Z_G(a)|$; $Z(G) = \{g \mid gh = hg \ \forall h\}, g \in Z(G) \Leftrightarrow |\text{Cl}(g)| = 1$.

Kreuzprodukt: $x \times (y \times z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z; (x \times y)_i = \varepsilon_{ijk} x_j y_k$.

Levi-Civita: ε_{ijk} total antisym., $\varepsilon_{123} = 1; \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$. **Kronecker:** $\sum_j \delta_{ij} a_j = a_i$.

Rangatz: $T : V \rightarrow W$ linear: $\dim V = \dim \ker T + \dim \text{im } T$. (Damit: $A^* \varphi = \varphi, \varphi$ nicht ausgeartet $\Rightarrow A$ invertierbar.)

Jordan-Normalform: Jedes $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist $A = SJS^{-1}$ mit J obere Dreiecksmatrix aus Jordanblöcken. (Damit: $\text{GL}(n, \mathbb{C}), \text{SL}(2, \mathbb{C})$ wegzshgd.)

Gram-Schmidt / QR: Jedes $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ist $A = QR$ mit $Q \in \text{O}(n), R$ obere Dreiecksm. mit positiver Diagonale. (Damit: $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ hat 2 Komponenten.)

orth. Komplement: $W^\perp = \{v \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}; V = W \oplus W^\perp, \dim W^\perp = \dim V - \dim W$. (Beweis von "unitär $\Rightarrow$ vollst. reduzibel".)

Untermannigfaltigkeit: $M = g^{-1}(c), Dg$ surjektiv auf $M \Rightarrow M$ glatt, $T_p M = \ker Dg(p), \dim M = \dim \text{Def.} - \dim \text{Ziel}$.