

Levi-Civita $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$, $\varepsilon_{123} = +1$, total antisymmetrisch

$$\sum_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}, \quad \sum_{ij} \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = \delta_{kl}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2, \\ \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \alpha \vec{n}$$

Vektoranalysis

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ \vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{a}) = \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{a} + \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \quad \vec{\nabla}_x \frac{1}{\|x - y\|} = -\frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|x - y\|^3}, \quad \Delta \frac{1}{4\pi r} = -\delta^3(\vec{x}), \\ \square := \Delta - c^{-2} \partial_t^2$$

Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet gilt: rotationsfreie Felder lassen sich als Gradient schreiben, divergenzfreie Felder als Rotation.

Koordinaten kartesisch $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, $\mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$
zylindrisch (r, φ, z) , $\mathrm{d}x^3 = r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \partial_\varphi + \vec{e}_z \partial_z, \quad \Delta = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 + \partial_z^2$$

sphärisch (r, ϑ, φ) , $\mathrm{d}x^3 = r^2 \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$, $\oint \mathrm{d}^2 \Omega = 4\pi$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \partial_\vartheta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi A_\varphi$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2} \left[\partial_\vartheta^2 + \cot \vartheta \partial_\vartheta + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \right]$$

Integralsätze

Gauss
$$\int_V \mathrm{d}x^3 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \oint_{\partial V} \mathrm{d}x^2 \vec{n} \cdot \vec{A}$$

Stokes
$$\int_A \mathrm{d}x^2 \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \oint_{\partial A} \mathrm{d}\vec{x} \cdot \vec{F}$$

1. Green
$$\int_V \mathrm{d}x^3 (\phi \Delta \psi + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi) = \oint_{\partial V} \mathrm{d}x^2 \vec{n} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi)$$

2. Green
$$\int_V \mathrm{d}x^3 (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \oint_{\partial V} \mathrm{d}x^2 \vec{n} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi)$$

δ -Distribution $\int \mathrm{d}x^n \delta^n(\vec{x} - \vec{a}) f = f(\vec{a})$, $[\delta^n] = \mathrm{m}^{-n}$, $\Theta'(x) = \delta(x)$

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \delta(x), \quad \delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (g(x_i) = 0)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)], \quad \delta(\cos \vartheta) = \delta(\vartheta - \frac{\pi}{2})$$

Jacobi: zyl. $\delta^3 = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0)$, sph. $\delta^3 = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$

Ladungsdichten: Kugelschale $\sigma \delta(r - R)$, Ebene $\sigma \delta(z)$, Kreisring $\lambda \delta(r - R) \delta(z)$; Probe $Q = \int_V \mathrm{d}x^3 \rho$.

Fourier, Greensche Funktion $F(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{F}$, $\tilde{F}(\omega) = \int \mathrm{d}t e^{-i\omega t} F$, $\int \mathrm{d}t e^{-i\omega t} = 2\pi \delta(\omega)$, $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$, $\partial_t \rightarrow -i\omega$; $D_x G = \delta(x - x') \Rightarrow \Phi_{\text{part}} = \int G f \, \mathrm{d}x'$; $\oint_\gamma f \, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum \text{Res}$, $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f$

Kugelflächenfunktionen (Brödel: $Y_{0,0} = 1$) $\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) - \frac{\vec{L}^2}{r^2}$, $\vec{L}^2 Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1) Y_{\ell,m}$, $L_z = -i\partial_\varphi$, $L_z Y_{\ell,m} = m Y_{\ell,m}$

$$\frac{1}{4\pi} \oint \mathrm{d}^2 \Omega Y_{\ell,m} Y_{\ell',m'}^* = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad Y_{\ell,m} = \sqrt{(2\ell+1) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$Y_{\ell,0} = \sqrt{2\ell+1} P_\ell(\cos \vartheta)$; Radialgleichung zu ℓ : r^ℓ (innen), $r^{-\ell-1}$ (ausen); $\frac{1}{\|x - x'\|} = \sum_\ell \frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \gamma)$ für $r > r'$, $\cos \gamma = \vec{n} \cdot \vec{n}'$.

Legendre-Polynome ($u = \cos \vartheta$) **DGL** $\partial_u [(1-u^2) \partial_u P_\ell] + \ell(\ell+1) P_\ell = 0$, regulär bei $u = \pm 1$ nur für $\ell \in \mathbb{N}_0$. **Definition** $\int_{-1}^1 \mathrm{d}u u^k P_\ell = 0$ für $k < \ell$, mit $P_\ell(1) = 1$, $\deg P_\ell = \ell$.

$$P_\ell = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \right)^\ell (u^2 - 1)^\ell, \quad P_\ell^m = \frac{(-1)^m (1-u^2)^{m/2}}{2^\ell \ell!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \right)^{\ell+m} (u^2 - 1)^\ell$$

$$\int_{-1}^1 \mathrm{d}u P_\ell P_{\ell'} = \frac{2 \delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-2ut+t^2}} = \sum_\ell P_\ell(u) t^\ell \quad (t = r'/r)$$

Parität $P_\ell(-u) = (-1)^\ell P_\ell$; $(\ell+1) P_{\ell+1} = (2\ell+1) u P_\ell - \ell P_{\ell-1}$; $P_0 = 1$, $P_1 = u$, $P_2 = \frac{1}{2}(3u^2 - 1)$, $P_3 = \frac{1}{2}(5u^3 - 3u)$. Azimutalsymmetrisch: $\Phi = \sum_\ell (a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-\ell-1}) P_\ell(\cos \vartheta)$, Koeffizienten $f_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 \mathrm{d}u f P_\ell$.

Integrale ($u = a^2 + x^2$) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{u}} = \ln(x + \sqrt{u})$, $\int \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{u}} = \sqrt{u}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{u^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{u}}$, $\int \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{u^3}} = -\frac{1}{\sqrt{u}}$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+b)^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi/a}$, $\int_0^\pi \sin^3 \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \frac{4}{3}$

1 ELEKTROSTATIK

Grundgleichungen Coulomb-Kraft auf q_1 durch q_2 :

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \frac{q_1 q_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{4\pi \epsilon_0 \|x_1 - x_2\|^3}, \quad \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{F}}{q} = \int \mathrm{d}y^3 \frac{\rho(\vec{y}) (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi \epsilon_0 \|x - y\|^3}, \quad \Phi(\vec{x}) = \int \mathrm{d}y^3 \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi \epsilon_0 \|x - y\|}$$

N Punktladungen: $\vec{E}(\vec{x}) = \sum_i \frac{q_i (\vec{x} - \vec{x}_i)}{4\pi \epsilon_0 \|x - x_i\|^3}$, $\Phi(\vec{x}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi \epsilon_0 \|x - x_i\|}$ (Superposition)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi, \quad \Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

integral: $\oint_{\partial V} \mathrm{d}x^2 \vec{n} \cdot \vec{E} = Q_V / \epsilon_0$, $\oint_{\partial A} \mathrm{d}\vec{x} \cdot \vec{E} = 0$

Spannung, Arbeit, Energie **Spannung** $U = \Delta \Phi = \Phi(\vec{x}_1) - \Phi(\vec{x}_2) = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \mathrm{d}\vec{x} \cdot \vec{E}$ (wegunabhängig, da $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$)

Arbeit an einer Ladung q : $\Delta W = -q \int_\gamma \mathrm{d}\vec{x} \cdot \vec{E} = q(\Phi(\vec{x}_2) - \Phi(\vec{x}_1))$

Energie einer Ladungsverteilung:

$$W = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x^3 \rho \Phi = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathrm{d}x^3 \vec{E}^2 \geq 0, \quad W = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 \|x_i - x_j\|}$$

Die Selbstenergie ist weggelassen (sie wäre unendlich).

Sprungbedingungen An Flächenladung σ : $\vec{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \sigma / \epsilon_0$, dagegen ist $\vec{E}_\parallel$ stetig. **Leiter:** $\vec{E} = 0$ innen, $\Phi = \text{const}$, $\vec{E} \parallel \vec{n}$ aussen, $\sigma = \epsilon_0 E_\perp$.

Beispiele Kugelsymmetrie $4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \mathrm{d}s 4\pi s^2 \rho(s)$, $E = e^{im\varphi}_{-\Phi'}$

Vollkugel $E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \begin{cases} r/R^3 & r < R \\ 1/r^2 & r > R \end{cases}$ **Kugelschale** $E =$

$$\begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$

Ebene $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$; **Draht** $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r$ (Kondensator siehe Kapitel 4)

Dipol $\vec{P} = q d \vec{n}$: zwei Ladungen $\pm q$ im Abstand d , $\vec{n}$ zeigt von der negativen zur positiven Ladung (so wie $\vec{P} = \int \mathrm{d}x^3 \rho \vec{x}$).

$$\Phi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{P}}{4\pi \epsilon_0 \|x\|^3}, \quad \vec{E} = \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{P}) - \vec{P}}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

Energie $W = -\vec{P} \cdot \vec{E}$, **Kraft** $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{P} \cdot \vec{E})$, **Drehmoment** $\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$

2 RANDWERTPROBLEME

Randbedingungen Dirichlet $\Phi|_{\partial V} = \omega$ (Leiter, geerdet): eindeutig. **Neumann** $-\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi|_{\partial V} = E_\perp = \nu$ (isoliert): eindeutig bis auf Konstante, Konsistenz $\oint_{\partial V} \mathrm{d}y^2 \nu = Q_V / \epsilon_0$.

Greensche Funktion $\Delta_y G(\vec{x}, \vec{y}) = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$, frei $G_0 = \frac{1}{4\pi \|x - y\|}$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \mathrm{d}y^3 G \rho - \oint_{\partial V} \mathrm{d}y^2 (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G) \omega - \oint_{\partial V} \mathrm{d}y^2 G \nu$$

Dirichlet: $G|_{\vec{y} \in \partial V} = 0$, der dritte Term entfällt, G ist symmetrisch.

Spiegelladungen Halbraum ($\vec{y}'$ Spiegelpunkt): $G = \frac{1}{4\pi \|x - y\|} \mp \frac{1}{4\pi \|x - y'\|}$, Minus bei Dirichlet, Plus bei Neumann.

Kugel R , Aussenraum, geerdet: $\vec{y}' = \frac{R^2}{\|y\|^2} \vec{y}$, $\alpha = \frac{R}{\|y\|}$

$$G = \frac{1}{4\pi \|x - y\|} - \frac{\alpha}{4\pi \|x - y'\|}$$

geerdet influenzierte Gesamtladung $-\alpha q$. **auf Potential U** $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} G + U \frac{R}{\|x\|}$.

isoliert mit Gesamtladung Q (Ladung kann nicht abfließen): die fehlende Ladung sitzt als Monopol im Zentrum,

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} G(\vec{x}, \vec{y}) + \frac{Q + \alpha q}{4\pi \epsilon_0 \|x\|}, \quad U = \frac{Q + \alpha q}{4\pi \epsilon_0 R}$$

Für $Q = 0$ (ungeladen) wird $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\|y\|}$.

Multipotentwicklung

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\|x\|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{P}}{4\pi\epsilon_0\|x\|^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{x_i x_j R_{ij}}{4\pi\epsilon_0\|x\|^5} + \dots$$

$$Q = \int dx^3 \rho, \quad \vec{P} = \int dx^3 \rho \vec{x}, \quad R_{ij} = \int dx^3 \rho (3x_i x_j - \delta_{ij} \vec{x}^2)$$

R_{ij} ist spurlos; sphärisch $\Phi = \sum_{\ell m} \frac{Q_{\ell,m}}{4\pi\epsilon_0} \frac{Y_{\ell,m}}{(2\ell+1)r^{\ell+1}}$ mit $Q_{\ell,m} = \int d^2\Omega dr r^{2+\ell} Y_{\ell,m}^* \rho$.

3 MAGNETOSTATIK

Grundgleichungen $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ **Biot-Savart**, für eine Stromdichte bzw. für eine dünne Schleife C mit Strom I ($\vec{j}dy^3 \rightarrow I d\vec{\ell}$):

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \int dy^3 \frac{\vec{j}(\vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi\|x - y\|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{x} - \vec{y})}{\|x - y\|^3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \text{ (statisch)}$$

integral: $\oint_{\partial D} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_D$, $I_A = \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{j}$
Kraftdichte $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$, **Kraft** $\vec{F} = \int dx^3 \vec{j} \times \vec{B} = I \oint_C d\vec{\ell} \times \vec{B}$,
Drehmoment $\vec{M} = \int dx^3 \vec{x} \times (\vec{j} \times \vec{B})$

Vektorpotential

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{A}(\vec{x}) = \mu_0 \int dy^3 \frac{\vec{j}(\vec{y})}{4\pi\|x - y\|}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$$

Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$; $W = \frac{1}{2} \int dx^3 \vec{A} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3 \vec{B}^2$

Magnetisches Moment

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int dx^3 \vec{x} \times \vec{j}, \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{\|x\|^3}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3}$$

Kraft $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$, **Drehmoment** $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$, **Energie** $W = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

Beispiele Draht $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$, Kraft pro Länge $\frac{\mu_0 I \tilde{I}}{2\pi r}$; **Spule** $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \vec{e}_z$ innen, 0 aussen, $L = \frac{\pi \mu_0 R^2 N^2}{\ell}$; **Kreisschleife** auf der Achse $B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$

4 MATERIE (STATIK)

$$\rho_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}}$$

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\epsilon_r = 1 + \chi_e$; $\mu = \mu_0 \mu_r$, $\mu_r = 1 + \chi_m$; dia $\chi_m < 0$, para $\chi_m > 0$, ferro (nichtlinear)

stetig: $\vec{D}_\perp, \vec{E}_\parallel, \vec{B}_\perp, \vec{H}_\parallel$ Leiter $\hat{=}\epsilon_r \rightarrow \infty$

Kondensator $\vec{D}$ wird von der freien Ladung erzeugt, $\vec{E}$ bestimmt die Spannung:

$$D = \frac{Q}{A} = \sigma_{\text{frei}}, \quad U = dE = \frac{dD}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{dQ}{\epsilon_0 \epsilon_r A}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = \epsilon_r C_0, \quad W = \frac{1}{2} \int dx^3 \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Das Dielektrikum erhöht C ; bei fester Spannung steigt W , bei fester Ladung sinkt es.

5 MAXWELL-GLEICHUNGEN

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad \vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}, \quad \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}$$

Der Verschiebungsstrom macht die MG mit der Kontinuität verträglich und erzeugt erst Wellen. **Faraday integral** $\Delta U_{\partial A} = -\dot{\Psi}_A$, $\Psi_A = \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B}$ (Lenz)

In Materie $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, $\vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{j}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$

Potentiale und Eichung

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda, \quad \Phi \rightarrow \Phi - \partial_t \Lambda$$

Lorenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + c^{-2} \partial_t \Phi = 0$: $\square \Phi = -\rho/\epsilon_0$, $\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$: $\Delta \Phi = -\rho/\epsilon_0$ (instantan)

6 ERHALTUNGSGRÖSSEN

w **Energiedichte** (Energie pro Volumen), $\vec{S}$ **Poynting-Vektor** (Energiestromdichte: Energie pro Fläche und Zeit), $\vec{\pi}$ **Impulsdichte** des Feldes, T **Maxwellischer Spannungstensor** (Impulsstromdichte: T_{jk} ist der Fluss der k -Impulskomponente in j -Richtung), $\vec{L}$ **Drehimpuls**.

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad \vec{\pi} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$$\partial_t w + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j} \quad \text{(Poynting)}$$

Die Feldenergie in V ändert sich durch Abfluss über den Rand und durch die am Strom geleistete Arbeit: $\dot{W}_V + S_{\partial V} + P_{\text{mech}} = 0$ mit der mechanischen Leistung $P_{\text{mech}} = \int_V dx^3 \vec{j} \cdot \vec{E}$.

$$T_{jk} = \epsilon_0 \left(E_j E_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_j B_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{B}^2 \right)$$

T ist symmetrisch, Diagonale = Druck/Zug längs der Feldrichtung, Spur $\text{tr } T = -w$.

$$\dot{\vec{\pi}} + \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot T \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_t \vec{P}_V + \vec{F}_V = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot T$$

$\vec{L} = \int dx^3 \vec{x} \times \vec{\pi}$; Symmetrie $\rightarrow$ Ladung: Zeit $\rightarrow W$, Ort $\rightarrow \vec{P}$, Rotation $\rightarrow \vec{L}$, Eichung $\rightarrow Q$. Galilei ist keine Symmetrie der MG.

7 SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

Lorentz-Transformation $x^0 = ct$, $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$, $\Lambda \eta \Lambda^T = \eta$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}$

$$\vec{x}' = \vec{x} - \gamma \vec{v} t + \frac{\gamma^2 (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v}}{c^2 (1 + \gamma)}, \quad t' = \gamma t - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{x}$$

Geschwindigkeitsaddition (kollinear) $v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$

Zeitdilatation $\Delta t = \gamma \Delta \tau$: eine bewegte Uhr (Eigenzeit τ) geht langsamer.

Längenkontraktion $L = L_0/\gamma$: ein bewegter Massstab ist in Bewegungsrichtung kürzer als seine Ruhelänge L_0 . Beides gilt nur längs $\vec{v}$, quer dazu ändert sich nichts.

Feldtransformation

$$\vec{E}' = \gamma \vec{E} + \gamma \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\gamma^2 (\vec{E} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{c^2 (1 + \gamma)}, \quad \vec{B}' = \gamma \vec{B} - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} - \frac{\gamma^2 (\vec{B} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{c^2 (1 + \gamma)}$$

kurz: $\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel$, $\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel$, $\vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_\perp$, $\vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2)_\perp$

Indexregeln kontravariant $A'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu A^\nu$, kovariant $B'_\mu = B_\nu \Lambda^\nu{}_\mu$, $x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu$
 $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$: $A_0 = -A^0$, $A_k = +A^k$; $A \cdot B = -A^0 B^0 + \vec{A} \cdot \vec{B}$; $\partial_0 = c^{-1} \partial_t$, $\partial^0 = -c^{-1} \partial_t$

Freier Index einmal pro Term und beidseitig gleich, Summationsindex zweimal (oben und unten). **Merksatz**: symmetrisch mal antisymmetrisch, über beide Indizes summiert, = 0.

Kovariante Elektrodynamik

$$A_\mu = \left(-\frac{\Phi}{c}, \vec{A} \right), \quad J_\mu = (-c\rho, \vec{j}), \quad F_{\mu\nu} = -\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu$$

$F_{0k} = E_k/c = -F_{k0}$, $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ (6 unabhängige Komponenten):

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}^T/c \\ -\vec{E}/c & \vec{B}^\times \end{pmatrix}$$

mit $(B^\times)_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$, also $\vec{A} \times \vec{B} = A^\times \vec{B}$. **dual** $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ mit $\varepsilon_{0123} = +1$, d.h. $\vec{E}/c \mapsto -\vec{B}$ und $\vec{B} \mapsto \vec{E}/c$:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{B}^T \\ \vec{B} & \vec{E}^\times/c \end{pmatrix}$$

inhomogen $\partial^\nu F_{\nu\rho} = \mu_0 J_\rho$
homogen $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$

Manifest kovariant heisst: beide Seiten tragen dieselbe freie Indexstruktur und transformieren daher gleich; gilt die Gleichung in einem Inertialsystem, gilt sie automatisch in allen. Man sieht die Lorentz-Invarianz an der Schreibweise, ohne sie nachzurechnen. Ladungserhaltung gratis: $0 = \partial^\rho \partial^\nu F_{\nu\rho} = \mu_0 \partial_\mu J^\mu$. Eichung $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$; Lorenz $\partial^\mu A_\mu = 0 \Rightarrow \square A_\mu = -\mu_0 J_\mu$.

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 \left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2} \right), \quad F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{4}{c} \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (\text{invariant})$$

Energie-Impuls-Tensor, Teilchen

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0}F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} + \frac{1}{4\mu_0}\eta_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$
$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -w & \vec{S}/c \\ \vec{S}/c & T_{ij} \end{pmatrix}, \quad T_{00} = -w, \quad T_{0i} = T_{i0} = \frac{S_i}{c}$$

symmetrisch, spurlos $T^\mu{}_\mu = 0$, und $\partial^\mu T_{\mu\nu} = -J^\rho F_{\nu\rho}$.
Teilchen $p^\mu = m\gamma(c, \vec{v})$, $p^2 = -m^2c^2$, $K_\mu = -\frac{q}{m}F_{\mu\nu}p^\nu \Rightarrow \dot{\vec{p}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ und $c\dot{p}^0 = q\vec{E} \cdot \vec{v}$ (Leistung).
Energie $E = cp^0 = \gamma mc^2$; die Ruheenergie mc^2 steckt darin, kinetisch ist $E - mc^2$. Aus $p^2 = -m^2c^2$ folgt

$$E^2 = \|p\|^2 c^2 + m^2 c^4, \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}$$

Differentialformen (kompakteste Schreibweise):

$$A = A_\mu dx^\mu \text{ (1-Form), } F = dA = \tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\nu \wedge dx^\mu \text{ (2-Form),}$$
$$\star F = \tfrac{1}{2}\tilde{F}_{\mu\nu}dx^\nu \wedge dx^\mu, \quad J = \star(J_\mu dx^\mu) \text{ (3-Form)}$$

$$dF = 0 \quad d\star F = \mu_0 J \quad dJ = 0 \quad \text{alles wegen } d \circ d = 0$$

★ ist der Hodge-Stern (er erzeugt den dualen Tensor und ist die einzige Stelle, die die Metrik kennt).

8 FREIE WELLEN UND STRAHLUNG

Ebene Wellen Quellfrei $\square \vec{E} = \square \vec{B} = 0$, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, $\Psi = \psi_+ (\vec{n} \cdot \vec{x} + ct) + \psi_- (\vec{n} \cdot \vec{x} - ct)$
monochromatisch $\Psi = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t}$, $\omega^2 = c^2 \vec{k}^2$, $\lambda = 2\pi/||k||$

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = \vec{n} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E}$$

$\vec{E} = \text{Re}[(a_1 \vec{n}_1 + a_2 \vec{n}_2)e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t}]$ mit $\vec{k} = ||k||\vec{n}_3$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.
Nach Drehung in der $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ -Ebene, Phasenverschiebung und Normierung bleibt $(a_1, a_2) = (1, i\alpha)$, $-1 \leq \alpha \leq 1$.
Händigkeit $\phi = +\pi/2$ gibt $\vec{E} \propto \vec{n}_1 \cos \omega t + \vec{n}_2 \sin \omega t$, Drehung also $\vec{n}_1 \rightarrow \vec{n}_2$, d.h. Rechtsschraube um $\vec{k}$ (Daumen $\parallel \vec{k}$): rechtshändig, positive Helizität, $\alpha = +1$. $\phi = -\pi/2$ umgekehrt. Optik-Konvention (Blick der Welle entgegen) nennt genau diesen Fall linkszirkular.

Energietransport $\vec{w} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2$ (linear), $w = \epsilon_0 E_0^2$ (zirkular); $\vec{\pi} = \frac{w}{c}\vec{n}$, $\vec{S} = cw\vec{n}$, $T = -w\vec{n}\vec{n}^T$
elektrischer = magnetischer Anteil; $v_{\text{Phase}} = \omega/||k||$ (darf $> c$),
 $v_{\text{Gruppe}} = d\omega/d||k|| \leq c$

Retardierte Potentiale $\square G = -\delta^3(\vec{x})\delta(t)$: $G_{\text{ret}} = \frac{c}{4\pi r}\delta(r - ct) = \frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r}$, $\tilde{G} = \frac{1}{\vec{k}^2 - \omega^2/c^2}$ (Pole $\rightarrow$ Kausalität)

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int d\vec{y}^3 \frac{\rho(\vec{y}, t - \frac{||x-y||}{c})}{4\pi\epsilon_0 ||x-y||}, \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \int d\vec{y}^3 \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{y}, t - \frac{||x-y||}{c})}{4\pi ||x-y||}$$

Monochromatische Quellen $\rho = \rho_0(\vec{y})e^{-i\omega t}$, $\vec{j} = \vec{j}_0(\vec{y})e^{-i\omega t}$, $k = \omega/c$: die Retardierung faktorisiert und wird zur Phase $e^{ik||x-y||}$,

$$\Phi(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \int d\vec{y}^3 \frac{\rho_0(\vec{y}) e^{ik||x-y||}}{4\pi\epsilon_0 ||x-y||}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \int d\vec{y}^3 \frac{\mu_0 \vec{j}_0(\vec{y}) e^{ik||x-y||}}{4\pi ||x-y||}$$

Strahlungszone ($r \gg d, \lambda$) $F = \text{Re}[F_0 e^{-i\omega t}]$, $k = \omega/c$, $\vec{\nabla} \rightarrow ik\vec{n}$, $\langle FG \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}[F_0 G_0^*]$; Entwicklung $||x-y|| \approx r - \vec{n} \cdot \vec{y}$ (Phase), $||x-y|| \approx r$ (Amplitude)

$$\vec{A}_{\text{as}} = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d\vec{y}^3 \vec{j}(\vec{y}) e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{y}}$$
$$\vec{B} = ik\vec{n} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = ikc[\vec{A} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{A})]$$

$$\frac{d^2 P}{d^2 \Omega} = r^2 \cdot \vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{ck^2 r^2}{2\mu_0} \left(||A||^2 - |\vec{n} \cdot \vec{A}|^2 \right) + \mathcal{O}(1/r)$$

Dipolstrahlung $\int d\vec{x}^3 \vec{j} = -ikc\vec{P}$, $\vec{A}_{\text{as}} = -ikc\mu_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \vec{P}$

$$\frac{d^2 P_{\text{as}}}{d^2 \Omega} = \frac{c^3 k^4 \mu_0}{32\pi^2} (||P||^2 - |\vec{P} \cdot \vec{n}|^2) \propto ||P||^2 \sin^2 \vartheta, \quad P = \frac{ck^4 ||P||^2}{12\pi\epsilon_0} \propto \omega^4$$

Magnetischer Dipol: gleiche Charakteristik unter $c\vec{P} \leftrightarrow \vec{M}$; Quadrupol $\propto k^6$. Nahzone ($r \ll \lambda$): Felder wie in der Statik, ohne Retardierung.

Lineare Antenne (Länge 2d auf der z-Achse, mittig gespeist) Strom läuft mit c ($e^{\pm ikz}$) und wird an den Enden reflektiert, dort $j = 0$:

$$\vec{j}(\vec{x}) = I \vec{e}_z \sin(kd - k|z|) \delta(x) \delta(y), \quad |z| \leq d$$
$$\vec{A}_{\text{as}} = \frac{\mu_0 I \vec{e}_z}{4\pi r} e^{ikr} \int_{-d}^{+d} dz e^{-ikz \cos \vartheta} \sin(kd - k|z|)$$
$$= \frac{\mu_0 I \vec{e}_z}{4\pi r} e^{ikr} \frac{2}{k} \frac{\cos(kd \cos \vartheta) - \cos(kd)}{\sin^2 \vartheta}$$

(Sinus als $e^{\pm ikz}$ schreiben, wegen $|z|$ in $z \gtrless 0$ aufspalten.) $\vec{A} \parallel \vec{e}_z \Rightarrow ||A||^2 - |\vec{n} \cdot \vec{A}|^2 = ||A||^2 \sin^2 \vartheta$:

$$\frac{d^2 P_{\text{as}}}{d^2 \Omega} = \frac{c\mu_0 I^2}{8\pi^2} \left(\frac{\cos(kd \cos \vartheta) - \cos(kd)}{\sin \vartheta} \right)^2$$

kurz $kd \ll 1$: Zähler $\rightarrow \frac{1}{2}(kd)^2 \sin^2 \vartheta$, reine Dipolkeule $\propto \sin^2 \vartheta$;
lang $kd \gg 1$: Nebenkeulen und Knoten durch Interferenz der Antennenabschnitte (neue Keulen etwa bei $kd \sim n\pi$). Momente $\int d\vec{x}^3 \vec{j} = I\vec{e}_z \frac{4}{k} \sin^2(\frac{1}{2}kd) \sim Ik d^2$, $\int d\vec{x}^3 \vec{j} \vec{x}^T = 0$, Quadrupol $\sim Ik d^4$.

Beschleunigte Punktladung retardierte Zeit s aus $||\vec{x} - \vec{y}(s)|| = c(t - s)$; $r = ||\vec{x} - \vec{y}(s)||$, $\vec{n} = \frac{\vec{x} - \vec{y}(s)}{r}$, $\vec{v} = \dot{\vec{y}}(s)$, $\vec{a} = \ddot{\vec{y}}(s)$, $k = 1 - \vec{n} \cdot \vec{v}/c \in (0, 2)$, $\partial_t s = 1/k$, $\vec{\nabla} s = -\vec{n}/(ck)$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 rk}, \quad \vec{A} = \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi rk} \quad (\text{Liénard-Wiechert})$$

momentan ruhend ($\vec{v} = 0$, $k = 1$): $\vec{B} = -\frac{\mu_0 q}{4\pi cr} \vec{n} \times \vec{a}$, $\vec{E} = \frac{q\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{\mu_0 q}{4\pi r} (\vec{a} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{a}))$

$$\frac{d^2 P}{d^2 \Omega} = \frac{\mu_0 q^2 \vec{a}^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \vartheta, \quad P = \frac{\mu_0 q^2 \vec{a}^2}{6\pi c} \quad (\text{Larmor, } \vartheta = \angle(\vec{a}, \vec{n}))$$

allgemeines $\vec{v}$: Geschwindigkeitsterm $\propto 1/r^2$ (mitgeschlepptes Coulombfeld, keine Strahlung) + Beschleunigungsterm $\propto 1/r$ (Strahlung):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 k^3} \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right) \left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) + \frac{\mu_0 q}{4\pi r k^3} \vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right], \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E}$$

$$\frac{d^2 P}{d^2 \Omega} = r^2 \vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c k^5} \left(\vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right] \right)^2$$

k^{-5} deformiert die Dipolkeulen in Bewegungsrichtung (**Synchrotronstrahlung**): für $||v|| \rightarrow c$ stark nach vorne gebündelt.

9 WELLEN IN MATERIE

Ausbreitung $w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, $\vec{\pi} = \vec{D} \times \vec{B}$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}, \quad ||k|| = \frac{\omega n}{c}, \quad \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0$$

Dispersion: Kausalität $\Rightarrow \vec{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{E}(\omega)$, also $\omega(||k||)$ nichtlinear, $v_g \leq c$.

Reflexion und Brechung stetig $\vec{E}_{||}, \vec{H}_{||}, \vec{D}_{\perp}, \vec{B}_{\perp}$; $\omega' = \omega$, $\vec{k}'_{||} = \vec{k}_{||}$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \text{ (Reflexion), } \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_3} = \frac{n_3}{n_1} =: n \text{ (Snellius)}$$

mit $c_1 = \cos \alpha_1$, $c_3 = \cos \alpha_3$, stets $R+T = 1$ und $T = 4nc_1c_3/(Nenner)^2$:

$$\text{TE } (\vec{E} \parallel): R = \left(\frac{c_1 - nc_3}{c_1 + nc_3} \right)^2, \quad \text{TM } (\vec{B} \parallel): R = \left(\frac{nc_1 - c_3}{nc_1 + c_3} \right)^2$$

Brewster tan $\alpha_B = n$, also $\alpha_1 + \alpha_3 = \pi/2$: $R_{\text{TM}} = 0$, reflektiertes Licht linear polarisiert.

Totalreflexion $n < 1$ und $\sin \alpha_1 > n$: $\cos \alpha_3$ imaginär, $R = 1$, evaneszente Welle.

Streuung $\frac{d^2 \sigma}{d^2 \Omega} = \frac{d^2 P_{\text{aus}}/d^2 \Omega}{d^2 P_{\text{ein}}/d^2 A}$; dielektrische Kugel $\vec{P} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 \vec{E}$

$$\frac{d^2 \sigma}{d^2 \Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 k^4 R^6 (1 + \cos^2 \vartheta), \quad \sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)^2 k^4 R^6$$

$\sigma \propto \omega^4$ (Rayleigh: blauer Himmel); senkrecht gestreutes Licht ist linear polarisiert.

Leiter und Wellenleiter $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, Ladung klingt mit ϵ_0/σ ab, also $\rho = 0$:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} - \mu_0 \sigma \partial_t \vec{E} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\mu_0\sigma = 0$$

$\vec{k}$ komplex $\Rightarrow$ Eindringtiefe $1/k_i$ (**Skin-Effekt**).
Hohlleiter $||z, F = \text{Re}[F(x, y)e^{ikz - i\omega t}]$:

$$\Delta \Psi = -\lambda \Psi \text{ mit } \lambda = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = c\sqrt{\lambda_n + k^2}$$

Nur Moden mit $\omega/c > \sqrt{\lambda_n}$ propagieren (**Cutoff**), sonst Abklinglänge $1/\sqrt{\lambda_n - \omega^2/c^2}$. **TE** $e = 0$, Neumann $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} b|_{\partial A} = 0$; **TM** $b = 0$, Dirichlet $e|_{\partial A} = 0$; **TEM** $\lambda = 0$ nur bei offenem oder nicht einfach zusammenhängendem Querschnitt (Koax). Rechteck $\lambda = \pi^2(n_x^2/d_x^2 + n_y^2/d_y^2)$; Energiefluss $P = v_g dW/dz$.

10 STROMKREISE

Induktivität, Kirchhoff $U_k = -\sum_j L_{kj} \dot{I}_j$, $W = \sum_{j,k} \frac{1}{2} L_{kj} I_j I_k$,

Spule $L = \frac{\pi \mu_0 R^2 N^2}{\ell}$ (rein geometrisch)

Knoten $\sum_k I_k = 0$; Masche $\sum_k \Delta U_k = 0$

Mit $\Delta U := U_1 - U_2$ über dem Bauelement: **Widerstand** $\Delta U = RI$;
Kondensator $\dot{Q} = I$, $\Delta U = Q/C$; **Spule** $\Delta U = L\dot{I}$

Schwingkreis (Reihe) Maschenregel gibt $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$ mit
 $Q(0) = Q_0$, $\dot{Q}(0) = I_0$. **Ansatz** $Q(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t}$ (lineare, homogene DGL mit konstanten Koeffizienten) liefert die charakteristische Gleichung

$$Lb^2 + Rb + \frac{1}{C} = 0 \quad \implies \quad b_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

Diskriminante $CR^2 - 4L$: > 0 stark, < 0 schwach, $= 0$ kritisch gedämpft.

Schwach: $\kappa = \frac{R}{2L}$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$, Abklingen wie $e^{-\kappa t}$.

Wechselstrom $X(t) = \operatorname{Re}[X_0 e^{i\omega t}]$, $Z = U_0/I_0$

$Z_R = R$, $Z_L = i\omega L$, $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$; Reihe $Z = \sum_k Z_k$, parallel
 $\frac{1}{Z} = \sum_k \frac{1}{Z_k}$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[U_0 I_0^*] = \frac{|U_0|^2 \operatorname{Re} Z}{2|Z|^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{Resonanz})$$