σ-Algebra (und Potenzmenge) 16.9.25

Sei X eine Teilmenge und $P(X) = 2^X = \{A \subset X\}$ die Potenzmenge ist. Dann ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, falls

(1) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(2) $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Daraus folgt

$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$ (*)

und

$\emptyset = A^c \cap A \in \mathcal{A}$, d.h. auch $X = \emptyset^c \in \mathcal{A}$

Aus (*) folgt $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

21.10.25

Mass, (äusseres) L. Mass, L. Integral einfacher Fkt.

- <u>Ein Mass</u> auf σ-Algebra ist Fkt $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ mit
  (1) $\mu(\emptyset)=0$ und (2) $A_1, A_2 .. \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i\neq j \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
- Das <u>äussere L. Mass</u> $\mu^* : P(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, $\mu^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |R_i| \mid R_i$ Quader die A überdecken$\}$
- $E \subset \mathbb{R}^n$ heisst <u>L.-Messbar</u>, falls $\forall A \subset \mathbb{R}^n : \mu^*(A) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A \setminus E)$
  - ↳ L. Messbare Mengen sind σ-Algebra
  - ↳ $\mu^*|_{\mathcal{A}} := \mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ist Lesgueshue-Mass
  - ↳ alle offenen und abg. Mengen sind L. Messbar
  - ↳ jede Abzählbare Menge ist L. Nullmenge
- Fkt $f : E \to \mathbb{R}$ heisst <u>Messbar</u>, falls $f^{-1}(I) = \{x \in E \mid f(x) \in I\}$ für alle Intervalle I messbar ist. (für $f: E \to \mathbb{C}$ Komponenten)
  - ↳ stg. Fkt, Summen und Produkte von messbaren und GW von Folgen messbarer Fkt sind messbar.
- Einfache Fkt sind $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{E_i}(x)$ mit $E_i \cap E_j = \emptyset \; \forall i \neq j$ E_i: messbar
- Das Int einfacher Fkt $\mu(E_i) < \infty$ ist $\int_E \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mu(E_i)$
- Sei $f \geq 0$ messbar $\Rightarrow \exists$ einfache Fkt $\varphi_i(x)$ $0 \leq \varphi_i \leq \varphi_{i+1}$ mit $\varphi_i \nearrow f$
  - ↳ L. Int: $\int_E f(x)dx := \lim_{i\to\infty} \int_E \varphi_i(x)dx < \infty \Rightarrow$ L. int'bar
  - ↳ beliebige f lassen sich als $f = f_+ - f_-$ schreiben.
  - ↳ f messbar $\Rightarrow |f|$ messbar, f int'bar $\Rightarrow |f|$ int'bar
- Eigenschaft gilt fast überall, falls $\mu^*(\{x \mid$ Eigenschaft gilt nicht$\}) = 0$

Rechenregel des L'int und Konvergenzsätze 21.9.23

- Gleiche Rechenregel wie bei R-int zusätzlich:

(1) $f=g$ f.ü. $\Rightarrow \int f = \int g$

(2) $\int |f| = 0 \Rightarrow f = 0$ f.ü.

(3) $F \subset E$ messbar $\Rightarrow f|_F$ int'bar und $\int_E f \chi_F = \int_F f$

(4) f ist R-int'bar auf $[a,b] \Rightarrow f$ ist L-int'bar und gleich

(5) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$ $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)\,dx$

- <u>Satz von B. Levi</u> (monotone convergence)

Sei $f_i \geq 0$ monoton steigende & beschränkte Folge int'bare Fkt. Falls $\int_E f_i(x)\,dx$ beschränkt gilt $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ int'bar und $\lim_{i\to\infty} \int_E f_i(x)\,dx = \int_E \lim_{i\to\infty} f_i(x)\,dx = \int_E f\,dx$

- <u>Satz von Lesbegue</u> (Dominated convergence theorem)

Sei f_i Folge von int'bar Fkt mit GW $f(x)$ und $\exists\, g$ (Majorante) s.d. $|f_i(x)| \leq g(x)\ \forall x$ und g int'bar, dann gilt:

(1) f ist int'bar

(2) $\lim_{i\to\infty} \int f_i\,dx = \int \lim_{i\to\infty} f_i\,dx = \int f\,dx$

Fubini-Tonelli, L^p-Räume, C_0-Menge 27.9.25

- Sei $f: E\times F \to \mathbb{C}$ int'bar ($\to [0,\infty]$ messbar) und $E\subset\mathbb{R}^m$, $F\subset\mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist für f.a. x die Fkt $y\mapsto f(x,y)$ int'bar (messbar) und

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,d(x,y) = \int_E\left(\int_F f(x,y)\,dy\right)dx = \int_F\left(\int_E f(x,y)\,dx\right)dy$$

- Sei $E\subset\mathbb{R}^n$ messbar, $f,g: E\to\mathbb{C}$ heißen äquivalent, falls $f=g$ f.ü. wir schreiben $(f\sim g)$
- Definiere $L^p(E) = \{f: E\to\mathbb{C} \mid f \text{ messbar} \wedge \int_E |f|^p < \infty\}/\sim$
  Dabei ist die Quotientierung wichtig, Da sonst $\|f\|_p = 0 \not\Rightarrow [f] = [0]$
- $L^p(E)$ ist $\mathbb{C}$ VR und
  $[f]\mapsto \|f\|_p = \sqrt[p]{\int_E |f(x)|^p\,dx}$ ist eine Norm auf $L^p(E)$
  $\hookrightarrow L^p(E)$ ist vollständig $\forall p\geq 1$
  $\hookrightarrow$ ist Banachraum (vollständig, normierter VR)
- Definiere $C_0(E) = \{$stg. Fkt $f: E\to\mathbb{C}$ mit komp träger$\}$
  wobei der träger $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \mid f(x)\neq 0\}}$
- Falls E messbar und lokal kompakt
  ($\forall e\in E\ \exists U$ offen, s.d. $e\in U$ und $\overline{U}$ kompakt)
  dann ist $C_0(E)\subset L^p(E)$ dicht.
- Die Abbildung $C_0(E)\to L^p(E)$ $f\mapsto[f]$ ist injektiv.

Fourier, Riemann-Lebesgue-Lemma (Konvergenzverhalten) 27.9.25

- Fourierreihen sind von der Form
  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(\frac{2\pi i n}{L} x)$, $x \in \mathbb{R}$, $f_n \in \mathbb{C}$, $L > 0$ fix (Periode)
  $\Rightarrow$ falls die Reihe punktweise konv ist GW L-Periodisch.
- falls $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s.d. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n| < \infty$ konv. die FR absolut und gleichmässig gegen eine stetige L-periodischen Fkt.
- sei f int'bar auf [0,L]. Dann def. wir den n-ten Fourier Koeffizienten
  $$f_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\exp(\frac{-2\pi i n}{L}x)dx = \frac{1}{L}\int_a^{a+L} f(x)\exp(\frac{-2\pi i n}{L}x)dx$$
  Wir nennen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(\frac{2\pi i n}{L}x)$ die FR unabhängig von konv.
- Riemann-Lebesgue-Lemma
  sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stg. (bzw Intbar auf [0,L]) und L-periodisch
  Dann gilt $f_n \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$
- Sei $f \in C^k(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ d.h. k-fach stg. diff'bar L-periodischen Fkt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Seien f_n die FK.
  Dann gilt $|n|^k |f_n| \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$

Dirichletkern, Konvergenzsätze, beschränkte Variation, Gibbs Phänomen 3.10.25

- Dirichletkern ist $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n t}$, $D_N \xrightarrow{N\to\infty}$ Deltafkt.
  - $\Rightarrow$ Die F. Partialsumm sind $S_N f(x) = \frac{1}{L}\int_0^L f(y) D_N\left(\frac{x-y}{L}\right) dy$
  - $\Rightarrow D_N(t) = D_N(t+1) \ \forall t$
  - $\Rightarrow \int_0^1 D_N(t)dt = 1$
  - $\Rightarrow D_N(t) = \begin{cases} \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} & \to t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \\ 2N+1 & \to t \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- Sei $f \in C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ und f_n die FK von f. Dann:
  $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$
- Eine Fkt $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ heisst <u>von beschränkter Variation</u> falls $\exists V$ s.d. $\forall$ Einteilung $a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$ gilt:
  $\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < V \rightsquigarrow C^1_{PW}$ sind v. besch. Variation
- Sei f L-periodisch und v. besch. Var auf $[0,L]$ und $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$ Dann:
  (1) $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) \sim R/L$-limes
  (2) Konvergenz ist glm auf abg. Int auf dem $f|_{Int} \in C^0$
  f stg $\Rightarrow S_N f(x) \to f(x) \ \exists$

  In einer Sprungstelle hat man keine glm Konvergenz.
- Gibbs Phänomen: Überschwingen um ca 9% der Sprunghöhe in der Umgebung von Sprungstellen.

Satz von Fejér, Trig Polys, Reelle FR 4.10.25

- Fejérsche Summe ist $(\sigma_N f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (S_n f)(x)$

  D.h. $(\sigma_N f)(x) = \int_0^1 f(y) K_N(x-y)\,dy$ wobei K_N die Fejérkern genannt wird und $K_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(t)$

  $\Rightarrow K_N(t) = K_N(-t) = K_N(t+1) \quad \forall t$

  $\Rightarrow \int_0^1 K_N(t)\,dt = 1$

  $\Rightarrow K_N(t) = \begin{cases} \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2 & \to t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ N & \to t \in \mathbb{Z} \end{cases}$, $K_N(t) \geq 0$

- Satz von Fejér: Sei $f \in C^0(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ Dann:
  $\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = f(x)$ mit glm Konvergenz.

- Ein trig. Poly ist <u>endliche</u> Linearkombination
  $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x}$

- Die Menge der trig. Polys $T_L \subset C^0(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ ist dicht bez. Sup-Norm $\Rightarrow C^0(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ fkt können beliebig gut durch trig Polys approximiert werden.

- Seien $f, g \in C^0(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ Dann gilt
  (1) $f_n = g_n \; \forall n \Rightarrow f(x) = g(x) \; \forall x$
  (2) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n| < \infty \Rightarrow f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$

- Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$. Dann gilt für FK
  $\overline{f_n} = f_{-n}$, d.h. $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right)$

  mit $a_n = 2\mathrm{Re}(f_n) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx$

  $b_n = 2\,\mathrm{Im}(f_n) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx$

Fouriertransformation, Poissonsche Summenformel, Vertauschung Int / Abl, 11.10.25
WLG, Gauss

- Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Fouriertransformation von f ist dann
$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ikx} dx \quad , \text{wobei } k \in \mathbb{R}^n, \ kx = \langle k, x \rangle$$
- Die inverse Fouriertransformation ist
$$\check{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ikx} dx$$
- Die Poissonsche Summationsformel besagt
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nL) = \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{L}\right) \quad , \text{wobei } L \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$
- Sei $f : (a,b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Fkt. die erfüllt:
  1) $x \mapsto f(t,x)$ ist int'bar
  2) $f_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$ ex $\forall (t,x) \in (a,b) \times \mathbb{R}^n$
  3) $\exists$ int'bare Fkt g auf $\mathbb{R}^n$ s.d. $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| \leq g(x) \ \forall x,t$

  Dann gilt $I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t) dx$ ist diff'bar und
$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) dx$$
- Wärmeleitungsgleichung auf Ring ist geg
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 (x,t)}{\partial x^2} \quad , x \in \mathbb{R}, \ t > 0$$
$$u(x,t) = f(x) \sim \text{Anfangsbedingung}$$
Sei $f \in C^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und für $x \in \mathbb{R}, t > 0$ $K(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t + inx}$

Dann ist $u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x-y,t) f(y) dy$ die Eindeutige Lösung der WLG in
$C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [0,\infty))$ mit AB. $f(x)$.

$\hookrightarrow K(x,t)$ lässt Sachsen Deltafunktion
- Gauss $f(x) = e^{-x^2/4t} \Rightarrow \hat{f}(k) = \sqrt{4t\pi}\, e^{-k^2 t}$

Regularität von (inv) FT, RL-Lemma, Rechenregeln, Gauss, Hermit-Fkt/Poly, Umkehrsatz 18.10.25

- Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann sind $\hat{f}, \check{f}$ glm. stg und $\forall x, k \in \mathbb{R}^n$:
  $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1$ und $|\check{f}(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n}\|f\|_1$
- Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\lim_{|k| \to \infty} \hat{f}(k) = 0$
- <u>Rechenregeln</u> für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
  (1) $FT(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$
  (2) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow FT(f(\lambda \cdot))(k) = |\lambda|^{-n} \hat{f}(k/\lambda)$
  (3) Sei $f_a(x) = f(x-a)$, für $a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \hat{f_a}(k) = \hat{f}(k) e^{-ika}$
  (4) $f\hat{g}, \hat{g}f \in L^1$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx$
  (5) $\overline{\hat{f}(k)} = FT(\overline{f})(k)$
  (6) $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f, \partial_j f \in L^1 \ \forall j \Rightarrow FT(\partial_j f)(k) = ik_j \hat{f}(k)$
  falls $x_j f, f \in L^1 \ \forall j \Rightarrow \hat{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\partial_j \hat{f} = FT(-ix_j f)$
- $f(x) = \exp(-\frac{1}{2}\langle x, x\rangle)$, wobei $\langle x, x\rangle = x^T A x$
  ein IP ist mit positiv definiter Matrix $A = B^T B$
  $\Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|\det B|} \exp(-\frac{1}{2} k^T A^{-1} k)$

- kompakter Träger $\longrightarrow$ FT $\longrightarrow$ holomorph
- Hermit-Fkt sind von Form: $h_n = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$
  und Hermit-Poly $H_n = (-1)^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \to h_n = H_n e^{-\frac{x^2}{2}}$
  Es gilt: $\hat{h}_n(k) = (-i)^n \sqrt{2\pi}\, h_n(k) \rightsquigarrow$ Eigenvektor von FT
- Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, s.d. $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$
  - $FT^{-1}(FT(f)) = f$
  - $\check{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow FT(FT^{-1}(f)) = f$

  $\Big\}$ gleichheit in L^1 d.h. $FT^{-1}(FT(f))(x) = f(x)$ f.ü.

  $\hookrightarrow$ falls zwei stg. Fkt f.ü. gleich sind, sind sie überall gleich.

Ergebnisse der FT, Plancherel, Schwartzraum, Halbnorm, Konvergenz, Fréchetraum 24.10.25

- $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}=0$ oder $\check{f}=0 \Rightarrow f=0$ f.ü. ($\hat{f}, \check{f}$ sind injektiv)
- $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow FT^2(f) = (2\pi)^n f(-x)$ f.ü.
- <u>Plancherel</u> $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2} \|\hat{f}\|_2$

  Gilt zudem $g, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \langle f, g\rangle = (2\pi)^{-n} \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$
- Für $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ ist die <u>Halbnorm</u> gegeben als $\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \in [0, \infty]$
- Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der $\mathbb{C}$-VR

  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \|\varphi\|_{\alpha,\beta} < \infty \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$

  ↳ Schwartz-Fkt / schnell-fallende Fkt. z.B. $e^{-a|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
- Eine Halbnorm ist Norm ohne pos. Definitheit.
- $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \Rightarrow x^\alpha \partial^\beta \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \exists\, C_{\beta,k} : |\partial^\beta \varphi(x)| \leq \frac{C_{\beta,k}}{(1+|x|^2)^k}$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall p$
- Folge $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $(j = 1 \ldots)$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, falls: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : \|\varphi - \varphi_j\|_{\alpha,\beta} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$

  schreibe dann $\varphi = \mathcal{S}\text{-}\lim_{j\to\infty} \varphi_j$ oder $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathcal{S}} \varphi$
- Eine Abb. $F: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heisst stg., falls $\forall$ konv. Folgen $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathcal{S}} \varphi$ gilt $F(\varphi_j) \xrightarrow[j\to\infty]{\mathcal{S}} F(\varphi)$
- lokal konvexer VR ist $(V, \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in F})$, wobei $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in F}$ eine Menge von Halbnorm und F beliebig ist. in dem gilt $\|u\|_\alpha = 0\ \forall \alpha \in F \Rightarrow u = 0$

  ↳ Falls F abzählbar $\Rightarrow V$ metrisierbar $d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|x-y\|_k}{1+\|x-y\|_k} 2^{-k}$

  ↳ falls diese zudem vollständig $\Rightarrow$ "Fréchetraum" z.B. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Volumen S^n, FT von rot-inv Fkt, Bessel, Reg. von Fkt (FT), Wellengleichung

2.11.23

- Das Volumen der S^{n-1} ist $|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$
- Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ rot-invariant ($g(Rx) = g(x)\ \forall R \in O(n)$)
  Dann ist $\hat{g}$ auch Rot-invariant und
  $$\hat{g}(k) = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} g(r)\, e^{-ikr}\, d\Omega\, r^{n-1}\, dr$$
- Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Die Besselfkt erster Gattung ordnung α ist dann
  $$J_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\alpha}$$
  insbesondere $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \sin(z)$
- Die Bessel-DGL ist
  $$J_\alpha''(z) + \frac{1}{z} J_\alpha'(z) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{z^2}\right) J_\alpha(z) = 0$$
- Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ rot-inv Dann ist die FT:
  $$\hat{g}(k) = 2\pi^{n/2} |k|^{1-\frac{n}{2}} \int_0^\infty g(r)\, J_{\frac{n}{2}-1}(|k|r)\, r^{n/2}\, dr$$
- Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rot-inv. und $f(x) = g(r)$
  $$\Delta f(x) = g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r)$$
- Sei $f \in C_0^s(\mathbb{R}^n) = \{$s-fach stg. diff'bar mit komp-träger$\}$
  Dann ex $C > 0$ s.d. $|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{(1+|k|)^s}$
  ↳ Regularität von f $\longleftrightarrow$ Abfallgeschwindigkeit von f
- Wellengleichung ist $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \Delta u$

Wärmeleitung, Separation der Variablen, Hilberträume und Orthogonale Systeme 18.11.25

- Sei f stg. und beschränkt auf $\mathbb{R}^n$ dann gilt $u(x,t) = (h_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h_t(x-y) f(y)\,dy$ eine Lösung von $\partial_t u = \Delta u$ und $\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x)$ wobei $h_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ $t \neq 0$ heisst <u>Wärmeleitung</u>.
- Separation der Variablen (1) suchen Lösung der Form $u(x,t) = f(x) g(t)$
  (2) Allg. Lösung als Superposition der Lsg. aus (1) schreiben
- Sei V ein ($\mathbb{R}$ oder) $\mathbb{C}$-VR mit IP $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ und der Norm $\|f\| = \sqrt{\langle f,f \rangle}$ und vollständig ist, dann nennen wir V den Hilbertraum.
- Sei $(f_n) \subset V$ eine Folge in IP-Raum V mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f \in V$
  (1) $\forall g \in V$ $\langle f_n, g \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f, g \rangle$, $\langle g, f_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle g, f \rangle$ IP stg.
  (2) $\|f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\|$
  (3) $|\|f_n\| - \|f\|| \leq \|f - f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- Familie $\{\varphi_j\}_j$, $\varphi_j \neq 0$ $\forall j$ von Vektoren in IP-Raum $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ heisst Orthogonalsystem, falls $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ $\forall i \neq j$
  $\Rightarrow$ Familie heisst Orthonormalsystem, falls zus $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$
  $\Rightarrow$ vollständig, falls $\forall f \in V$ gilt $|\langle \varphi_j, f \rangle| = 0$ $\forall j \Rightarrow f = 0$
- Sei $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ IP-Raum und $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ orthogonal
  (1) $\|\varphi_1 + \ldots + \varphi_n\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \ldots + \|\varphi_n\|^2$ $\Rightarrow$ Pythagoras
  (2) $\{\varphi_j\}$ ON $\Rightarrow \forall \varphi \in V$: $\sum_{j=1}^{n} |\langle \varphi_j, \varphi \rangle|^2 \leq \|\varphi\|^2$ mit gleichheit ist $\varphi \in \operatorname{span}(\{\varphi_j\})$
  (3) $\{\varphi_j\}$ ON $\Rightarrow \varphi \in V, n \in \mathbb{N}$ $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \mapsto \|\varphi - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j\|^2$ ist minimal für $\lambda_j = \langle \varphi_j, \varphi \rangle$ $\forall j$ $\Rightarrow$ Projektion

Vollst. ON-System, Bessel-Ungl., ONB (seperabel)
FR auf L^2, Hermit-Basis, Creation/annihilation 22.11.25

- Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $(\varphi_j)_{j=1,2..}$ ON ($\langle\varphi_j,\varphi_i\rangle = \delta_{ij}$)
  TFAE ① $(\varphi_j)_{j=1,2..}$ ist vollst. d.h. $\langle v,\varphi_j\rangle = 0 \ \forall j \Rightarrow v = 0$
  ② $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \langle\varphi_j,\varphi\rangle\varphi_j = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\langle\varphi_j,\varphi\rangle\varphi_j \Leftrightarrow \|\varphi - \sum_{j=1}^{N}\langle\varphi_j,\varphi\rangle\varphi_j\| \xrightarrow{N\to\infty} 0$
  ③ Parseval: $\|\varphi\|^2 = \sum (\langle\varphi_j,\varphi\rangle)^2 \ \forall\varphi\in H$
- Bessel-Ungl: $\sum_{j=1}^{n} |\langle\varphi_j,\varphi\rangle|^2 \leq \|\varphi\|^2$
- Vollst. ON-Sys von Hilbertraum heißt ONB alternativ Hilbertraumbasis, Schauder-Basis (Achtung ≠ ONB aus LA – alg. Basis Hamel-Basis)
- Ist ONB höchstens abzählbar heißt HR seperabel Def. alle
  ↳ jeder separable HR ist isom. zu $\mathbb{C}^n$ oder ℓ^2 falls $\dim H = \infty$
  wobei $\ell^2 = \{(a_1,\dots) \mid \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2 < \infty\}$
- Sei $f\in L^2([0,1])$, $\varphi_j = e^{2\pi i j x} \in L^2([0,1])$, $c_j = \langle\varphi_j,f\rangle = \int_0^1 \overline{\varphi_j}(x) f(x)dx$ – FK von f
  ① $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\varphi_j$ in $L^2([0,1])$ d.h. a priori nicht Punktweise
  ② $\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2$ (Parseval)

  Es ist also $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ONB von HR $L^2([0,1])$ und FR von f ist Entwicklung in dieser Basis.
  ↳ genau für $L^2([0,L])$ mit $\varphi_j = e^{\frac{2\pi i j}{L}x}$
- $\nexists f\in L^2(\mathbb{R})$ s.d. $xf = \lambda f$
- $\psi_n(x) = (2^n\sqrt{\pi}\, n!)^{-1/2} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ bilden ONB auf $L^2(\mathbb{R})$
- Creation $A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})$ und Annihilation $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx})$
- Sei $\phi_n = 2^{-n/2} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$
  ① $[A, A^*] = 1$ ② $\varphi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \langle A^*\varphi,\psi\rangle = \langle\varphi, A\psi\rangle$
  ③ $A\phi_0 = 0$ ④ $A^*\phi_n = \phi_{n+1}$
- Der Hamilton-OP ist gegeben als $H = A^*A + \frac{1}{2}$
- $A\phi_n = n\phi_{n-1}$ → Annihilation, $A^*\phi_n = \phi_{n+1}$ → Creation
  $A^*A\phi_n = n\phi_n \Rightarrow H\phi_n = (n+\frac{1}{2})\phi_n$

Orthogonale Polynome, Legendre-Polys, Wellengleichung auf Kreisscheibe, Kugelfunktion 28.11.25

•) Um System orthogonaler Polys auf $\mathbb{C}[x]$ zu finden brauchen wir Intervall $E \subset \mathbb{R}$, $|E| > 0$ und messbare Fkt $\rho: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ s.d. $\rho(x) > 0$ f.ü. und $\int_E |x|^n \rho(x)\,dx < \infty$, IP $\langle f,g \rangle = \int_E \bar{f}(x) g(x) \rho(x)\,dx$
→ wir können GSOV auf $1, x, x^2 \ldots$ anwenden

•) $E = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2} \Rightarrow$ orthogonale Polys sind Hermitepolynome

•) $E = [-1,1]$, $\rho(x) = 1 \Rightarrow$ Legendre-Polynome

•) Das l-te Legendre-Poly ist $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l$ $l \in \mathbb{N}_0$
→ Es gilt: (1) $\deg(P_l) = l$, (2) $\langle P_l, P_{l'} \rangle = \frac{1}{2l+1} \delta_{ll'}$, (3) $P_l(1) = 1$, ONB

•) Sei $L = \frac{d}{dx}(x^2-1)\frac{d}{dx}$ (ist hermitesch)
① $LP_l = l(l+1)P_l$ ② $\left\{\sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l\right\}$ bilden ONB von $L^2[-1,1]$

•) $\rho(x) = (1-x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$ – Gegenbauer, $\rho(x) = e^{-x}$ – Laguerre, $\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ Jacobi

•) Betrachte Wellengleichung auf Kreisscheibe $\partial_t^2 v = \Delta v$, $v(t,|x|=R) = 0$
→ wir wenden Separationsansatz wiederholt an und erhalten nach Umstellung durch Hilfsfkt Bessel-DGL
→ wir erhalten $v(t,r,\varphi) = J_m\left(\frac{x_{m,n} r}{R}\right)(A e^{im\varphi} + B e^{-im\varphi}) e^{i \frac{x_{m,n}}{R} t}$
wobei J_m die Besselfkt sind

•) Laplace-Op in Kugelkoordinaten in n-dim ist
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}},$$
wobei $\Delta_{S^{n-1}}$ sphärischer Lap-Op ist

•) Gesucht ist ONB von $L^2(S^{n-1})$ aus Eigenfkt von $\Delta_{S^{n-1}}$

•) Eine C^2-Fkt f ist harmonisch, falls $\Delta f = 0$

•) Ein Polynom $P \in \mathbb{C}[x_1 \ldots x_n]$ ist homogen vom Grad l, falls $P = \sum c\, x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$ ist für $\sum l_i = l$

•) Die Kugelfunktionen vom Grad l sind die Einschränkungen auf S^{n-1} von homogenen, harmonischen Polynomen vom Grad l.

•) Sei $\mathcal{H}_l \subset \mathbb{C}[x_1 \ldots x_n]_{=l}$ der Raum der harmonischen, homogenen Polynome vom Grad l. Dann gilt
$$\mathbb{C}[x_1 \ldots x_n]_{=l} = \mathcal{H}_l \oplus (x_1^2 + \ldots + x_n^2)\,\mathbb{C}[x_1 \ldots x_n]_{=l-2}$$
wobei $\oplus$ die innere Summe ist, d.h. $P \in \mathbb{C}[x_1 \ldots x_n]_{=l}$ lässt sich eindeutig als Summe von Elementen von $\mathcal{H}_l$ und $(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\,\mathbb{C}[x_1 \ldots x_n]_{=l-2}$ schreiben.

Kugelfunktionen, Additionstheorem, Kugelfkt in DGL 8.12.25

- Wir haben gesehen, dass $e^{im\varphi}$ ONB von $L^2(S^1)$ sind. Wir wollen weiter ONB für $L^2(S^{n-1})$ von Eigenfkt Y von $\Delta_{S^{n-1}}$ finden. D.h. $\Delta_{S^{n-1}} Y = -\lambda Y$
- $\Delta p = 0 \Leftrightarrow \Delta_{S^{n-1}} p = -\ell(\ell+n-2)p \leadsto$ verwenden harmonischen Poly
- <u>Def</u>: Kugelfkt vom Grad ℓ sind Einschränkungen von harmonischen, homogenen Polynom vom Grad ℓ auf S^{n-1}.
- $\mathbb{C}[x_1 \dots x_n]_{=\ell} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)\,\mathbb{C}[x_1 \dots x_n]_{\ell-2} \oplus \mathcal{H}_\ell$
- $\dim \mathcal{H}_\ell = \dim \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]_\ell - \dim \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]_{\ell-2} = \binom{n+\ell-1}{\ell} - \binom{n+\ell-3}{\ell-2}$
- Kugelfkt sind dicht in $L^2(S^{n-1})$
- <u>Def</u>: Die Kugelfkt für $\ell = 0,1,2\dots$, $m = -\ell, \dots \ell$

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_{\ell,m}(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

wobei $P_{\ell,m}(z) = \frac{(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m+\ell} (z^2-1)^\ell$

die assoziierten Legendre-Polynome sind.

- $Y_{\ell m} : S^2 \to \mathbb{C}$ ist Einschränkung von homogenen Poly $r^\ell Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ vom Grad ℓ auf S^2.
- $Y_{\ell m}$ ist harmonisch, also $\Delta_{S^{n-1}} Y_{\ell m} = -\ell(\ell+n-1) Y_{\ell m}$, also ist $Y_{\ell m}$ Kugelfkt gemäss erster Definition.
- $Y_{\ell m}$ bilden für $m \in \{-\ell, \dots \ell\}$ Basis von $\mathcal{H}_\ell$
- $Y_{\ell m}$ und $Y_{\ell' m'}$ sind ON $(Y_{\ell m}, Y_{\ell' m'})_{S^2} = \int_{S^2} \overline{Y_{\ell m}} Y_{\ell' m'} = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$
  $\leadsto$ D.h. $Y_{\ell m}$ ist ONB für $L^2(S^2)$ $\ell = 0, \dots$ $m = -\ell \dots \ell$
- Für $X \mathrel{\hat=} (\theta,\varphi)$ und $Y \mathrel{\hat=} (\theta',\varphi')$ in S^2 gilt Additionstheorem

$$P_\ell(X\cdot Y) = P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\overline{Y_{\ell m}(\theta',\varphi')}$$

wobei $X \cdot Y = \cos\gamma$ und γ der Zwischenwinkel ist.

$\leadsto P_\ell$ ist Legendre-Polynom $P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (x^2-1)^\ell$

Distributionen, Rechenregeln, Konvergenz, Fundamentallösung der Poisson-GL 13.12.25

- Eine temperierte Distribution ist eine stg., lineare Abbildung $\omega: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto \omega[\varphi]$.
  Der VR der temperierten Distribution sei $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
  ↳ In beliebig-dim Räume sind lin. Abb nicht stetig.
  ↳ In lin. Abb ist stg. äquivalent zu stg. in Null.
- Translation $T_a\omega[\varphi] = \omega[T_{-a}\varphi]$
- lin. Transformation $U_A\omega[\varphi] = |\det A|\,\omega[U_{A^{-1}}\varphi]$
- Ableitung $\partial^\alpha\omega[\varphi] = (-1)^{|\alpha|}\omega[\partial^\alpha\varphi]$
- Multiplikation mit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $g\omega[\varphi] = \omega[g\varphi]$
- Faltung mit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $(g*\omega)[\varphi] = \omega[\tilde{g}*\varphi]$, $\tilde{g}(x) = g(-x)$
- FT $\hat{\omega}[\varphi] = \omega[\hat{\varphi}]$, Inv. FT $\check{\omega}[\varphi] = \omega[\check{\varphi}]$
- $\widehat{\partial^\alpha\omega}[\varphi] = (ix)^\alpha\,\hat{\omega}[\varphi]$
- $g*\delta[\varphi] = g[\varphi]$ $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- $\hat{1}[\varphi] = (2\pi)^n\delta[\varphi]$
- Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$
  $\Rightarrow \partial^\alpha(\omega*g) = (\partial^\alpha\omega)*g = \omega*(\partial^\alpha g)$
- Wir sagen eine Folge $\omega_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, wenn $\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\lim_{j\to\infty}\omega_j[\varphi] = \omega[\varphi]$
- Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$ und $f_j = f(jx)j^n$.
  Dann konvergiert f_j gegen $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
- Poisson-gleichung ist $\Delta u(x) = f(x)$, wobei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gesucht ist, s.d. $\Delta u[\varphi] = u[\Delta\varphi] = f[\varphi]$ $\forall\varphi$
- Eine Fundamentallösung für Differentialoperator $L = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le N}} a_\alpha\partial^\alpha$ ist eine Distribution $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ s.d. $LE = \delta$.
  erhalten wir E, so ist $u = E*f$ eine LSG von $Lu = f$
- Für n-dim Laplace-Operator ist $E = \begin{cases} \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}(2-n)}|x|^{-n+3} & n\geq 3 \\ \frac{1}{2\pi}\ln|x| & , n=2 \end{cases}$
  eine Fundamentallösung. D.h. sie erfüllt als Distribution $\Delta E = \delta$

Fundamentallösungen mittels FT, Retardierte Fundamentallösung

22.12.23

- Sei L ein Differentialoperator, $Lu=f$
 Dann ist $LE=\delta$ eine Fundamentallösung, $u=E*f$
- Sei $L=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|\leq N}}$ $\Rightarrow$ $\widehat{LE}=P(k)\hat{E}=\hat{\delta}=1$

 D.h. wir haben $E=\left(\frac{1}{P(k)}\right)^\vee$, $P(k)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|\leq N}} a_\alpha (ik)^\alpha$

 Dies geht nur, falls $\frac{1}{P(k)}$ eine Distribution definiert, also insbesondere int-bare Singularitäten hat.

- Für den d'Alembert-Operator $(\partial_t^2-\Delta)u=f$ in $\mathbb{R}^4$ haben wir eine nicht wohldefinierte Fundamentallösung $E(k)$.
 $\hookrightarrow$ wir verschieben die Pole um $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} +i\varepsilon$ mit Residuensatz und Rechtecks contour erhalten wir
 $u(x_0,\vec{x})=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}f(x_0-|\vec{x}-\vec{x}'|,\vec{x}')d\vec{x}'$
 wobei wir diese Lösung ein Retardierte Fundamentallösung nennen da das Zeitargument von f $x_0-|\vec{x}-\vec{x}'|\leq x_0$ ist.