Riemannsche Zahlenkugel & Möbiustransformation 17.9.25

Def: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Topologie von $\overline{\mathbb{C}}$:

$U \subset \overline{\mathbb{C}}$ heisst offen, falls

(1) $\infty \notin U$ und $U \subset \mathbb{C}$ offen, oder

(2) $\infty \in U$ und $K = \overline{\mathbb{C}} \setminus U$ kompakt

$A \subset \overline{\mathbb{C}}$ ist abgeschlossen ($\Leftrightarrow A^c$ offen) falls:

(1) $\infty \in A$ und $A \cap \mathbb{C}$ ist abg., oder

(2) $\infty \notin A$ und $A \subset \mathbb{C}$ ist kompakt

Riemannsche Zahlenkugel (Bijektion zwischen S^2 und $\overline{\mathbb{C}}$)

$\phi : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ mit $\phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + i x_2}{1 - x_3} & x_3 \neq 1 \\ \infty & \text{im Nordpol} \end{cases}$

Möbiustransformationen

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$, $\phi_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ die Möbiustransformation mit $\phi_A(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $\dfrac{\lambda}{\infty} = 0, \lambda \neq 0$

M.T. ist Kombination von Verschiebung, Drehung, Skalierung und Invertierung der Zahlenkugel. Eigenschaften:

- ϕ_A ist stetig auf $\overline{\mathbb{C}}$
- $A, B \in GL(2, \mathbb{C}) \Rightarrow \phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$, $\phi_A^{-1} = \phi_{A^{-1}}$
- $\lambda \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \Rightarrow \phi_{\lambda A} = \phi_A$
- Kreise und Geraden werden auf Kreise und Geraden abgebildet
- $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ verschieden $\Rightarrow \exists!$ Möbius Transf. $\phi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ s.d. $\phi(z_1) = 0$, $\phi(z_2) = 1$, $\phi(z_3) = \infty$

  mit $\phi(z) = \dfrac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$

komplexe Diff'barkeit & erste Eigenschaften

17.9.25

Def $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine Fkt $f: \Omega \to \mathbb{C}$ heisst komplex diff'bar an der Stelle z_0, falls folgender GW existiert:

$$a := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

(Richtung von h muss egal sein für ex.)

Wir nennen a die komplexe Ableitung von f bei z_0.

Satz Ist $f: \Omega \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in \mathbb{C}$ komp. diff'bar, so ist f in z_0 auch stetig.

Satz $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Fkt und $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. TFAE

(1) f ist k. diff'bar in z_0

(2) f ist $\mathbb{R}$. diff'bar in z_0 $\left(a+bi \mapsto \binom{a}{b}\right)$ und die Ableitung $df(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

ist die Matrix die der Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht. $\left(z = \alpha + i\beta \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\right)$

(3) u und v sind diff'bar in z_0 und es gelten Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

(4) f ist $\mathbb{R}$. diff'bar in z_0 und

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$$

Falls eine bzw alle der obigen gelten ist $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ und $df(z_0)$ ist mult Matrix mit $f'(z_0)$.

Rechenregeln $\mathbb{C}$-diff'bar, analytisch / holomorph / biholomorph 24.9.25

- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-diff'bar in $z_0 \in \Omega$.
  (1) $f+g$ ist $\mathbb{C}$-diff'bar und $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
  (2) $f \cdot g$ ist $\mathbb{C}$-diff'bar und $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
  (3) $g(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$, $\frac{f}{g}$ $\mathbb{C}$-diff'bar und $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$
  (4) (Riesige Def/Zielbereich) $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$
- Wir nennen $f : \Omega \subset \mathbb{C}$ offen $\to \mathbb{C}$ <u>analytisch</u> auf $\mathbb{C}$, falls f in jedem $z_0 \in \Omega$ $\mathbb{C}$-diff'bar ist.
- Falls f analytisch und $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ stg ist, ist f holomorph.
  $\Rightarrow$ Bem: noch zz: holomorph $\iff$ analytisch
- Sei $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ offen. $f : \Omega \to \Omega'$ ist biholomorph oder holomorpher Diffeomorphismus, falls f und f^{-1} holomorph sind.
  Dann gilt $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$

inverse FT, konforme Abb., harmonisch (weg)zusammenhängend / homotop
zusammenziehbar

24.9.25

Inverse FT: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holom. mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann existiert $U \subset \Omega$ offene Umgebung von z_0, s.d. $V = f(U)$ offen ist und $f|_U : U \to V$ biholomorph. (lokal invertierbar)

- Für $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph werden Winkel erhalten, wir sagen f ist winkeltreu / konform
- Sei $u: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion. Wir nennen u harmonisch, falls u die Laplace-Gleichung erfüllt.
  $\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0$
  $\to$ $F = u + iv$ holomorph $\Rightarrow$ u & v sind harmonisch und wir nennen „v zu u konjugiert"
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, dann TFAE:
  (1) Ω ist zusammenhängend
  (2) Ω ist C^n-Wegzusammenhängend (für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$)
- Zwei glatte Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \Omega$ heissen homotop (mit festen Endpunkten), falls eine C^∞-Abbildung $u: [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ ex. s.d. $\forall \lambda, t \in [0,1]$ $u(\lambda, t) = \gamma_\lambda(t)$. Die Kurvenschar $\{\gamma_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ heisst glatte Homotopie zwischen γ_0 und γ_1.
- Eine geschlossene Kurve heisst zusammenziehbar, wenn sie homotop zur konstanten Kurve (Punkt) ist.
  $\to$ $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und konvex $\Rightarrow$ alle zwei Kurven sind homotop.

Integral, Umparametrisierungen, Vertauschung von Int/Dif, konservativ Satz von Cauchy/ u.m. 1.10.25

- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stg., $\gamma: [a,b] \to \Omega$ in C^1, und das Integral f über γ ist dann $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt$
- Seien f, γ wie oben. $\phi: [\alpha, \beta] \to [a,b]$ umparametrisieren in C^1 mit $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$. Dann gilt $\int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$
  ↳ Bei Orientierungsumkehrung ändert sich Vorzeichen
- Holomorphe F heißt Stammfkt von f, wenn $F' = f$
- Sei $u: [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ stg., s.d. $\frac{\partial u(\lambda,t)}{\partial\lambda}$ ex. $\forall \lambda, t$. Dann $U(\lambda) = \int_a^b u(\lambda,t)dt$ stg. diff'bar und $U'(\lambda) = \frac{d}{dy}U(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial u(\lambda,t)}{\partial\lambda}dt$
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \Omega$ holomorph. $\gamma_0, \gamma_1: [0,1] \to \Omega$ glatt mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$. Falls γ_0, γ_1 Homotop mit festen Endpunkten, so $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$
- <u>Satz von Cauchy</u>: Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, und $\gamma: [0,1] \to \Omega$ glatt, geschlossen und zusammenziehbar
  $\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = 0$
- Das Integral über eine PW C^∞ Fkt ist Summe der Glatten Int.
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stg. TFAE
  1. $\exists$ holomorphe Fkt F s.d. $F' = f$
  2. für jede stückweise C^∞ Kurve γ in Ω gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$
  3. Das Int von f über $\gamma \in C^\infty_{PW}$ hängt nur von Endpunkt ab
- Sei $U \subset \mathbb{C}$ offenes Quadrat und $Z = \{x_1 \dots x_m\} \subset U$ endlich. Sei $\Omega = U \setminus Z$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stg. TFAE
  1. Es gibt holomorphe Fkt $F: \Omega \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$
  2. Für jedes Abgeschlossen Rechteck $R \subset U$ gilt $\partial R \cap Z = \emptyset \Rightarrow \int_{\partial R} f(z)dz = 0$

Satz von Cauchy, Windungszahl 8.10.25

- Sei $U \subset \mathbb{C}$, offenes Quadrat $Z = \{\xi_1 \dots \xi_m\} \subset U$ endlich $\Omega := U \setminus Z$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei analytisch und $\lim_{z \to \xi_j} (z - \xi_j) f(z) = 0 \; \forall j$, dann gilt:
  Für jedes abgeschlossene Rechteck $R \subset U$
  $\partial R \cap Z = \emptyset \Rightarrow \int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$
- Sei alles gleich wie oben, es gilt zudem
  (1) $\exists$ Stammfkt $F : U \setminus Z \to \mathbb{C}$ holomorph, $F' = f$
  (2) $\forall \gamma : [a,b] \to U \setminus Z \in C^\infty_{PW}$ gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$
- Bemerke, dass $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,dt$
- Bemerke, dass Stammfkt auf zsh Gebieten eindeutig bis auf additive Konstante sind.
- Bemerke, dass Satz von Cauchy auch für $U \subset \mathbb{C}$ offen Kreisscheiben gilt.
- <u>Def Windungszahl</u>
  Sei $I \subset \mathbb{R}$ abg. Intervall. $\gamma : I \to \mathbb{C} \in C^\infty_{PW}$ geschlossen. Dann heisst $\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in I\}$ die Bildmenge von γ.
  Für $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ heisst $w(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$
  die Windungszahl von γ um a.
- Die Windungszahl $w(\gamma, a)$ einer geschlossenen Kurve ist in $\mathbb{Z}$.

Glatte Schleifen, Fundamentalgruppe davon Windung, Holomorph, 16.10.23
Morera, Hebbare Singularitäten, Cauchy-Ungleichung, Liouville, FTOA

- Eine C^∞-Fkt $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(1+t) = \gamma(t)$ heisst Glatte Schleife. γ ist glatte geschlossene Kurve.
- Integrale von holomorphen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ über glatte Schleifen sind invariant unter Homotopie in Ω.
  ↳ insbesondere Windungszahlen.
- $U \subset \mathbb{C}$ offen Kreisscheibe, $Z \subset U$ endlich $f : U \setminus Z \to \mathbb{C}$ analytisch, s.d. $\lim_{z \to \xi} (z-\xi) f(z) = 0 \ \forall \xi \in Z$. Sei $a \in U \setminus Z$, $\gamma : I \to U \setminus (Z \cup \{a\})$ in C^∞_{PW} geschlossen. Dann gilt
  $$w(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$ ⇝ wir können $f(a)$ 'ertasten'
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt:
  (1) f ist holomorph (f' stetig)
  (2) f ist beliebig oft differenzierbar
  (3) Sei $a \in \Omega$ und $r > 0$, s.d. $\overline{B_r}(a) \subset \Omega$, $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $\gamma(t) = a + re^{2\pi i t}$
  Dann gilt $\forall z \in \overline{B_r}(a) : f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stg. TFAE:
  (1) f ist analytisch
  (2) f ist holomorph
  (3) $\forall$ achsenparallele Rechtecke $R \subset \Omega$ gilt $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$
- Morera: $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stg, s.d. $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jede glatte Schleifen $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \Omega \Rightarrow f$ ist holomorph.
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$. Dann ex. $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. wobei $\tilde{f}(z) = f(z) \ \forall z \in \Omega, z \neq a$, $\tilde{f}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - a)}$
- Cauchy-Ungleichung: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \Omega$, $r, M > 0$ s.d. $B_r(a) \subset \Omega$ und $\forall z \in B_r(a)$ gilt $|f(z)| \leq M$, dann $\forall n \in \mathbb{N} : |f^{(n)}(a)| \leq \frac{M n!}{r^n}$
  ↳ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph beschränkt $\Rightarrow f$ konst.
  ↳ Pf of FTOA: assume poly has no zero $\Rightarrow \frac{1}{p}$ is const ↯!

Weierstrass, Potenzreihe, Taylorreihen, Identitätssatz 23.10.25

- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge hol. Fkt, die auf komp Teilmenge $K \subset \Omega$ glm. gegen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert $\Rightarrow f$ ist holomorph und $(f_n')_{\mathbb{N}}$ konv glm gegen f' auf jeder komp Teilmenge.

- Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ haben konv. Radius $\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$ $\leadsto$ Reihe konv. glm $\forall$ kompakt $K \subset B_\rho(0)$

- Taylorreihen: Def: sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$. Die Taylorreihe von f in z_0 ist
$$T_{z_0}^{\infty} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$
sei $r > 0$, s.d. $B_r(z_0) \subset \Omega$. Dann gilt
(1) $\forall n \in \mathbb{N}$ ex $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und
$$f_n(z)(z-z_0)^n = f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z_0 - z)^k$$
$\leadsto f_n$ ist eindeutig
(2) $\forall z \in B_r(0)$ ist $f_n(z) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(z_0 + t(z-z_0))\, dt$
sei $0 < R < r$ und γ_R kurve die $B_R(z_0)$ umläuft.
$\forall z \in B_R(z_0)$: $f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^n (\xi - z)}$
(3) Sei ρ Konvradius von Taylorreihe $T_{z_0}^{\infty} f$, dann $\rho \geq r$ und $f(z) = T_{z_0}^{\infty} f(z)$ $\forall z \in B_r(z_0)$

- $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $z, w \in B_R(z_0)$, $k, \ell \in \mathbb{N}$
$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} \frac{d\xi}{(\xi - z)^k (\xi - z_0)^\ell} = 0$$

- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zsh. und $a \in \Omega$. Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, mit $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(z) = g(z)$ $\forall z \in \Omega$

Nullstellen, Ordnung der NST, Offenheitssatz, Biholomorphiesatz, Maxima, Pole & Singularitäten 2.11.25

- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen + zsh., $f: \Omega \to \mathbb{C}$ hol, nicht konst. $f(z_0) = 0$ für $z_0 \in \Omega$, so ex $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$ und $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Dann $f(z) \neq 0$ (NST sind isoliert)
  ↳ Fkt mit kompaktem Träger sind nicht hol.
- Ω offen + zsh. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ hol. Dann ist $f \equiv 0$ falls
  (1) $f|_U = 0$ für $U \subset \Omega$ offen,
  (2) NST von f haben Häufungspunkt in Ω
  (3) $\exists\, \gamma: [a,b] \to \Omega$ nicht konst + stg, s.d. $f(\gamma(t)) = 0 \ \forall t$
- Sei $f: \Omega \subset \mathbb{C}$ offen $\to \mathbb{C}$ hol. nicht konst. $z_0 \in \Omega$ eine NST. Dann heißt $n \in \mathbb{N}$, für die $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ und $f^{(k)}(z_0) = 0$ $\forall k < n \in \mathbb{N}_0$ Ordnung der Nullstelle z_0 von f. ($\exists$ Satz)
- Offenheitssatz: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen + zsh. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ hol, nicht konst. $U \subset \Omega$ offen. Dann ist $f(U) \subset \mathbb{C}$ offen. (Bilder offener sind offen)
- Biholomorphiesatz: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, zsh, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ hol, injektiv also insb. nicht konst. Dann $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ und $f: \Omega \to f(\Omega)$ ist Biholomorph (injektiv + hol $\Rightarrow$ Biholomorph)
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, zsh, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ hol + nicht konst. Dann hat $|f|: \Omega \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |f(z)|$ kein Maximum in Ω.
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen + beschränkt $f: \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stg., s.d. $f|_\Omega: \Omega \to \mathbb{C}$ hol. Dann ist $\max\limits_{z \in \overline{\Omega}}(|f(z)|) = \max\limits_{z \in \partial\Omega}(|f(z)|)$ ⇝ max auf Rand
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, $f: \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ hol. Dann heißt a
  (1) <u>Hebbare Singularität</u>, falls $\lim\limits_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$ ⇝ hol. fortsetzbar
  (2) <u>Polstelle</u>, falls $\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = \infty$
  (3) <u>Wesentliche Singularität</u>, falls a weder hebbar noch Pol ist.
  ↳ z.B. $\exp(\frac{1}{z}): \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ hol. mit Pol in z_0. Dann
  (1) $\exists!\, n \in \mathbb{N}$ s.d. $c = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z)$ ex ($c \neq 0, \infty$) $\Rightarrow$ "Ordnung der Pol"
  (2) n Ordnung $\Rightarrow \exists\, g: \Omega \to \mathbb{C}$ hol. s.d. $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$ $\forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}$, $g(z_0) \neq 0$
  (3) $\exists\, b_i \in \mathbb{C}$, s.d. $b_n \neq 0$ und $\phi: \Omega \to \mathbb{C}$ hol, s.d. $f(z) = \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \phi(z)$
  (4) für ϕ aus (3) gilt $\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}$ $\forall z \in B_r(z_0)$, solange $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$, wobei $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$

Casorati-Weierstrass, Ketten & Zyklen, einfach zsh, Cauchy - Allgemein, Wurzel & log 13.11.25

- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ hol, sei z_0 eine wesentliche Singularität von f. Dann gibt es für jedes $w \in \mathbb{C}$ eine Folge $z_n \in \Omega \setminus \{z_0\}$ $n \in \mathbb{N}$, s.d. $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$ $\Rightarrow$ ($\Leftrightarrow f(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})$ ist dicht in $\mathbb{C}$ $\forall r > 0$) $\Rightarrow$ Analog: R-Umordnung.
- Kette ist Linearkombination über $\mathbb{Z}$ von glatten Kurven.
- Kette γ ist Zyklus, falls jeder Punkt gleich oft Start & Endpunkt ist, d.h. $\sum_{\gamma_j(0)=z} m_j = \sum_{\gamma_j(1)=z} \quad \forall z \in \Gamma$
- Das Integral einer stg. fkt $f: \Omega \to \mathbb{C}$ entlang Kette γ ist $\int_\gamma f(z)dz := \sum_{j=1}^{N} m_j \int_{\gamma_j} f(z)dz$. Windungszahl ist $w(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$
- Wir schreiben $\mathcal{C}(\Omega) = \{\text{Ketten in } \Omega\}$, $\mathcal{Z}(\Omega) = \{\text{Zyklen in } \Omega\}$
- Zwei Ketten $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(\Omega)$ heissen äquiv., ($\alpha \equiv \beta$) wenn $\forall$ stg. fkt $f: \Omega \to \mathbb{C}$ gilt $\int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz$
- $w(\gamma, a)$ ist konst auf Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen & zsh. Dann heisst Ω einfach zsh, falls $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ zsh. ($\Leftrightarrow A, B \subset \overline{\mathbb{C}}$ abg. mit $A \cup B = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ und $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$)
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen + zsh. TFAE (1) Ω ist einfach zsh.
  (2) Für jeden Zyklus $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$ und $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ gilt $w(\gamma, z) = 0$

- Cauchy: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stg. TFAE
  (1) f ist holomorph
  (2) Für jedes abg. Rechteck $R \subset \Omega$ gilt $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$
  (3) Für jeden Zyklus $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$ s.d. $w(\gamma, z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = 0$
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen + zsh. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ hol $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$ ein Zyklus mit Bildmenge Γ, s.d. $w(\gamma, z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \Rightarrow w(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a}$ $\forall a \in \Omega \setminus \Gamma$
- Cauchy (e. zsh): $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, zsh + e. zsh. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stg. TFAE
  (1) f ist holomorph
  (2) $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ $\forall$ abg Rechteck $R \subset \Omega$
  (3) Für jeden Zyklus $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$: $\int_\gamma f(z)dz = 0$
  (4) Es gibt $F: \Omega \to \mathbb{C}$ hol s.d. $F' = f$
- Wurzel & log: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, zsh + e. zsh. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ hol s.d. $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ex hol. fkt $g, h: \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\exp(g(z)) = f(z) \wedge h(z)^n = f(z) \quad \forall z \in \Omega$

Achsenparallele Polygone, Homologie, Laurentreihe 23.11.23

- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Kette $\gamma = \sum_{j=1}^{N} m_j \gamma_j \in C(\Omega)$ heisst Achsenparalleles Polygon, wenn jedes γ_j die Form $\gamma_j(t) = a_j + t \cdot \lambda_j$ hat mit $\lambda_j \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stg, s.d. $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ $\forall$ abg. Rechteck $R \subset \Omega$. Dann gilt für jedes Achsenparallele Polygon $\sigma \in Z(\Omega)$ $w(\sigma, z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\Omega \Rightarrow \int_\sigma f(z)dz = 0$
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma \in Z(\Omega)$. Dann ex ein Achsenparalleles Polygon $\sigma \in Z(\Omega)$ s.d. $\forall \phi: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph $\int_\sigma \phi(z)dz = \int_\gamma \phi(z)dz$ $\leadsto$ Approximation durch A.P.P
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen: Ein Zyklus $\gamma \in Z(\Omega)$ heisst null-homolog, falls $w(\gamma, z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\Omega$. (zusammenziehbar)
- $\alpha, \beta \in Z(\Omega)$ heissen homolog, falls $\alpha - \beta$ null-homolog ist. Schreiben $\alpha \sim \beta$, $B(\Omega) = \{\gamma \in Z(\Omega) \mid \gamma \text{ null-homolog}\} \subset Z(\Omega)$
  $[\alpha] = \{\beta \in Z(\Omega) \mid \alpha \sim \beta\} = \alpha + B(\Omega)$ heisst Homologieklasse v. α.
  $\mathcal{H}(\Omega) = \{[\alpha] \mid \alpha \in Z(\Omega)\} = Z(\Omega)/B(\Omega) = Z(\Omega)/\sim$
  erste Homologiegruppe von Ω
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen + zsh. Dann Ω e. zsh $\Leftrightarrow \mathcal{H}(\Omega) = \{0\}$
- $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz$ $\forall f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph.
- Seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 \le R_0 < R_1 \le \infty$ gegeben. Sei $U \subset \mathbb{C}$ die offene Kreisring $U := \{z \in \mathbb{C} \mid R_0 < |z-a| < R_1\}$ und $f: U \to \mathbb{C}$ eine hol. Fkt. Dann gilt folgendes
  (1) Es gibt eine Familie komplexer Zahlen $c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ s.d.
  $$\limsup_{n\to\infty} |c_{-n}|^{1/n} \le R_0 < R_1 \le \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}$$ und $\forall z \in U$
  $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k (z-a)^k$$
  mit glm Konvergenz auf jedem Kompaktum in U
  (2) Die Koeffizienten c_n in (1) sind durch f eindeutig bestimmt und es gilt
  $$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$$
  für $n \in \mathbb{Z}$ und $R_0 < r < R_1$, wobei $\gamma_r: [0,1] \to U$ durch $\gamma_r(t) := a + re^{2\pi i t}$ für $0 \le t \le 1$ def.

Residuum, Diskret, Residuensatz, Berechnen von Residuen 27.11.25

∘) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ $(R_0 = 0)$ und $f: B_{R_1}(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien $(c_k) \subset \mathbb{C}$ die Laurent-Reihe Koeffizienten. Dann heißt $\mathrm{Res}(f,a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz$ das Residuum von f an der Stelle a.

∘) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $A \subset \Omega$ heißt diskret, falls A keine Häufungspunkte in Ω hat. D.h. $\nexists$ Folge $(a_n) \subset A$ $(a_m \neq a_n, m \neq n)$ s.d. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \Omega$ ist.

↳ Äquiv: $\forall z \in \Omega : \exists \delta$ so s.d. $A \cap (B_\delta(z) \setminus \{z\}) = \emptyset$ ⇒ isoliert

↳ A ist diskret $\iff \# A \cap K < \infty$ $\forall K \subset \Omega$ kompakt.

∘) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $A \subset \Omega$ diskret $f: \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $\gamma \in B(\Omega)$ ein Null-homologer Zyklus mit Bild $\Gamma \subset \Omega$, s.d. $\Gamma \cap A = \emptyset$ Dann gilt

① $\#\{a \in A \mid w(\gamma, a) \neq 0\} < \infty$

② $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a \in A} w(\gamma,a)\,\mathrm{Res}(f,a)$

Pol 1. Ordn

∘) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ $f: \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ hol. Dann $\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z \to a}(z-a)f(z) =: c$, falls lim ex und $\neq \infty$ ist.

↳ genau dann, wenn $\lim_{z\to a}(z-a)^2 f(z) = 0$

∘) $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $p, q: \Omega \to \mathbb{C}$ hol. $Z = \{\zeta \in \Omega \mid q(\zeta) = 0\}$, $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ $f: \Omega \setminus Z \to \mathbb{C}$ hol. Ist a einfache NST von q, d.h. $q'(a) = 0$, dann gilt $\mathrm{Res}(f,a) = \frac{p(a)}{q'(a)}$ / Quotient mit Pol. 1. Ordnung

∘) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\phi: \Omega \to \mathbb{C}$ hol. $a \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, sei $f: \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$

$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-a)^n} \Rightarrow \mathrm{Res}(f,a) = \frac{\phi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$ / Pol höherer Ordnung

∘) Berechnung von Integralen mit Residuensatz

① Schreibe Integral als $\int_\gamma f(z)\,dz$

② Finde Sing. und berechne Residuen

③ Wende Residuensatz an, um Int zu lösen

∘) $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = 2\pi \sum_{a \in B_1(0)} \mathrm{Res}(f,a)$, wobei

$f(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2}\right)$

berandet, meromorphe Fkt, Prinzip vom Argument, Satz von Rouché

4.12.25

- Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen & beschränkt $\gamma \in Z(\mathbb{C})$ mit Bild Γ.
  Wir sagen γ berandet G, falls $G \cap \Gamma = \emptyset$ und $w(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & z \in G \\ 0 & z \notin G \cup \Gamma \end{cases}$
- Sei $G, \Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\overline{G} \subset \Omega$ sei $\gamma \in B(\Omega)$ und berandet G.
  Sei $A \subset \Omega$ diskret mit $A \cap \Gamma = \emptyset$. Sei $f : \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph.
  Dann gilt $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{a \in A \cap G} \operatorname{Res}(f, a)$
- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ dann eine stg. Fkt $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ heisst meromorph,
  falls $A = \{a \in \Omega \mid f(a) = \infty\} \subset \Omega$ diskret ist und $f|_{\Omega \setminus A} : \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$
  holomorph. (keine wesentlichen Singularitäten) ⇒ bilden Vektorraum
- <u>Prinzip vom Argument</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zsh. und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$
  eine meromorphe Fkt, s.d. $f \neq 0$ ($\exists z$ s.d. $f(z) \neq 0$), seien
  a_j für $j \in J$ indexmenge die NST von f mit Ordnung m_j und
  b_k für $k \in K$ " die Polstellen der Ordnung n_k.
  Sei $\gamma \in B(\Omega)$ dessen Bildmenge Γ kein a_j oder b_k enthält.
  Dann $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j \in J} w(\gamma, a_j)\, m_j - \sum_{k \in K} w(\gamma, b_k)\, n_k$
- f, γ wie oben. Dann gilt $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = w(f \circ \gamma, 0)$
- <u>Satz von Rouché</u>: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen + zsh. $G \subset \mathbb{C}$ offen, s.d.
  $\overline{G} \subset \Omega$ sei $\gamma \in B(\Omega)$ der G berandet. Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph,
  s.d. $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \forall z \in \Gamma$
  Dann hat f und g die gleiche Anzahl NST in G
  mit Vielfachheit gezählt.

Riemannscher Abbildungssatz, Schwarzsches Lemma 10.12.25

- Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen + e.zsh. $\Omega \neq \emptyset$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Sei $z_0 \in \Omega$ beliebig, dann gibt es <u>genau eine</u> biholomorphe Abb $f: \Omega \to \mathbb{D} = B_1(0)$ s.d. $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}$
- Es gibt einige wichtige Beispiele zu solchen Biholomorphismen

1) $\Omega = \mathbb{D}$, $z_0 \in \mathbb{D}$ beliebig $\Rightarrow f(z) = \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$

2) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$, $z_0 = 1 \Rightarrow f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

3) $\Omega = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$, $z_0 = i \Rightarrow f(z) = i \dfrac{z-i}{z+i}$

4) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0 \wedge Re(z) > 0\} \Rightarrow z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $f(z) = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \dfrac{z^2 - i}{z^2 + i}$

5) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 < Im(z) < 1\}$ $z_0 = 0$, $f(z) = \dfrac{e^{\pi z/2} - 1}{e^{\pi z/2} + 1}$

- Bemerke, dass wir Eindeutigkeit nur machen, da wir $f'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}$ fordern. Ansonsten gäbe es unendlich viele Biholomorphismen, die durch Rotation um Null erzeugt werden.
- <u>Schwarzsches Lemma</u>

Sei $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in \mathbb{D}$

Dann gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$

gilt $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, so hat f die Form $f(z) = cz$ für $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$