Galilei-Transformationen, Inertialsystem, Newton, isoliertes 2-Teilchen System 28.9.25

- Galileitransformationen: $t' = \lambda t + a$, $\vec{x}' = R(t)\vec{x} + \vec{b}(t)$
- Inertialsystem: Trägheitssatz gilt, d.h. Kräftefreie Körper bewegen sich gleichförmig & Geradlinig.
- Galileitransformation (In.sys ⟺ In.sys): $t' = \lambda t + a$, $\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{b}$
- Galileitransformation sind 10-dim Gruppe (Galileigruppe)
- Relativitätsprinzip: Naturgesetze sind in allen In.sys gleich.

Isoliertes System: keine externen Kräfte
↳ es gilt dann Schwerpunktsatz $\vec{X}(t) = X(0) + \frac{\vec{P}}{M} t$
↳ und Impulserhaltung $\frac{d}{dt}\vec{P} = 0$

- Determinismus (Newton): in isolierten System ist $\vec{x}_i(t)$ eindeutig durch $\vec{x}_i(0)$, $\dot{\vec{x}}_i(0)$ und $\vec{F}_i(\vec{x}_1(t), \dot{\vec{x}}_1(t) \dots \vec{x}_N(t) ..)$ bestimmt.
- Ein mechanisches System ist ein nicht notwendigerweise isoliertes System in dem Determinismus gilt.
- Isoliertes 2-Teilchen System.
  Galileiinvarianz ⇒ Kräfte entlang Verbindungslinie und nur von Abstand abhängig

D.h. $$\vec{F}_{12}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = f_{12}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)\,\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

Potential, Passiv vs. Aktiv, Erhaltungsgrössen, Galilei-invariantes Potential 28.9.25

- In einem isolierten N-Teilchen System kommt die Kraft von einem Galilei-invarianten Potential

$$\vec F_i = -\vec\nabla_{\vec x_i} V(\vec x_1, \dots \vec x_N) \ , \quad V(\vec x_1, \dots \vec x_N) = V(R\vec x_1 + \vec a, \dots R\vec x_N + \vec a)$$

- Wir unterscheiden: (bei Galileitransformationen)

  Passive Interpretation $\Rightarrow$ Physik bleibt gleich

  Aktive Interpretation $\Rightarrow$ Mathematik bleibt gleich

- Betrachte ein isoliertes N-Teilchen System.

  ① Impulssatz: $\dot{\vec P} = \vec F$

  ② Drehimpulssatz: $\dot{\vec L} = \vec M \ , \ \vec L = \vec L_S + M\vec X \times \dot{\vec X}$

  ③ Energiesatz: $\dot T = \sum \dot{\vec x}_i \vec F_i \ , \ T = T_S + \frac{1}{2} M \dot{\vec X}^2$

- In einem System mit Galilei-invarianten Potential gilt:

  ① $\sum \vec F_i = 0 \Rightarrow \dot{\vec P} = 0$

  ② $\sum m_i \vec x_i \times \vec F_i = 0 \Rightarrow \dot{\vec L} = 0$

  ③ $\sum \vec F_i \dot{\vec x}_i = -\frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(T+V) = 0$

  Impuls, Drehimpuls und Energie sind Erhalten.

Die 10-Dimension der Galilei-Gruppe korrespondiert mit 10 Erhaltungsgrössen.

Erhaltungsgrösse	Komponenten	Analogon
Impuls	3	Translation $\vec b$
Drehimpuls	3	Rotation R
Energie	1	Zeittranslation a
$M\vec X - \vec P t$	3	Systemgeschwindigkeit $\vec v$

Beschleunigte Bezugssysteme, Scheinkräfte 28.9.25

- Bewegtes Koordinatensystem $\vec{x} = R(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$

  Ziel $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \longrightarrow$ im y-System
- Vorgehen
  - $\vec{x}$ zweimal ableiten
  - nach $\ddot{y}$ umstellen

$$\ddot{\vec{y}}(t) = R^T(t)\left[\ddot{\vec{x}} - 2\dot{R}(t)\dot{\vec{y}}(t) - \ddot{R}(t)y(t) - \ddot{\vec{b}}(t)\right]$$

- wir haben Kräfte

$$m\ddot{\vec{y}}(t) = \vec{K} - m\vec{a} - 2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{y}} - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{y} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{y})$$

wobei
- $\vec{K} = R^T\vec{F}$ die Trasformierte Kraft ist
- $m\vec{a}$ die Führungskraft (Trägheit)
- $2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{y}}$ die Corioliskraft
- $m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{y})$ die Zentrifugalkraft
- $m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{y}$ von $\dot{\vec{\omega}}$ abhängt

- Träge Masse ist A priori nicht gleich schwere Masse (aus Gravitation). Das beide gleich sind ist experimentelle Beobachtung.

2-Körper problem

29.9.25

- Voraussetzungen m_1, m_2 $\quad m_i \ddot{\vec{x}}_i = -\nabla_{\vec{x}_i} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$

  Schwerpunktsatz $\vec{X} = \frac{1}{M}(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)$, $\ddot{\vec{X}} = 0$

  Reduzierte Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

  ↳ Wir Reduzieren von 6-dimension auf 3-dimension mit Schwerpunkterhaltung und μ

- Erhaltungsgrößen

  ① Drehimpuls

  $\vec{L} = \mu \vec{x} \times \dot{\vec{x}}$, $\dot{\vec{L}} = 0$ ⇝ Bahnkurve in Ebene

  ↳ 3dim → 2dim Problem

  In dieser Ebene gilt $l := \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{konst.}$

  ↳ Fläche pro Zeit ist konstant.

  ② Energie

  $E = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}} \dot{\vec{x}} + V(|\vec{x}|)$, $\frac{dE}{dt} = 0$ ⇝ Energieerhalten

  Effektives potential

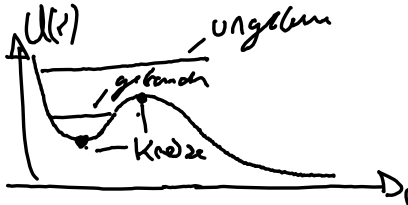
  $U(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$ ⇝ $E = U(r) + T$

  ↳ 1 dim Bewegung in effektivem Potential

  ↳ Aus $E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U(r)$ finden wir Integral für $t(r)$ daraus können wir lokal $r(t)$ bestimmen.

  ↳ Integrable Problem (numerisch lösbar)

- Verschiedene Bahntypen

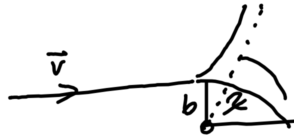


  (1) Gebundene Bahnen $(r(t) \leq M)$

  ↳ $T = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r))}}$ von Radius

  ↳ Azimut $\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{l\,dr}{r^2\sqrt{\mu(E - U(r))}} \neq n \cdot 2\pi$

  (2) Streubahn $r(t \to \infty) \to \infty$, $E \to T$



  ↳ Streuwinkel $\chi = \pi - 2\theta$, $\theta = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b\,dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$

  ↳ Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{d\chi}{db}\right|^{-1}$

Keplerproblem, Rutherford'sche Streuformel, Lenz-Runge 1.10.25

o) Betrachte $V(r) = -\frac{1}{r} G M_0 m$, $\mu = \frac{M_0 m}{M_0 + m}$

Dann gilt $\mu \ddot{\vec{x}} = -\frac{\vec{x}}{r^3} G M_0 m$

wir finden $r(\varphi) = \frac{d}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$, dies sind Kegelschnitte

wobei $d = \frac{\ell^2}{G M_0 m \mu}$, $\varepsilon = \sqrt{\frac{2\mu E}{\ell^2} + \left(\frac{G M_0 m \mu}{\ell^2}\right)^2} \frac{\ell^2}{G M_0 m \mu}$

Dabei finden wir $\varepsilon < 1 \rightarrow$ Elipse

$\varepsilon = 1 \rightarrow$ Parabel

$\varepsilon > 1 \rightarrow$ Hyperbel

1) D.h. bei Elipsen haben wir gebunden Bahn und negative Energie $E < 0$. Ausserdem finden wir $\dot{F} = \text{konst} \Rightarrow F = \dot{F} T \Rightarrow T = \frac{F}{\dot{F}} \Rightarrow T^2 \propto a^3$

Das heisst aus Flächensatz finden wir Bezieh für Perioden und Halbachsenlänge.

2) Hyperbelbahn bei $\varepsilon > 1$, $E > 0$ wir finden Differentielle Streuwinkel $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{G M_0 m}{4E \sin^2\frac{\chi}{2}}\right)^2$

Dies ist Rutherford'sche Streuformel, wobei χ der Streuwinkel ist.

o) Analog können wir zeigen, dass $\vec{A} = \mu \dot{\vec{x}} \times \vec{L} - G M_0 m \mu \frac{\vec{x}}{r}$ also der Lenz-Runge-Vektor erhalten bleibt.

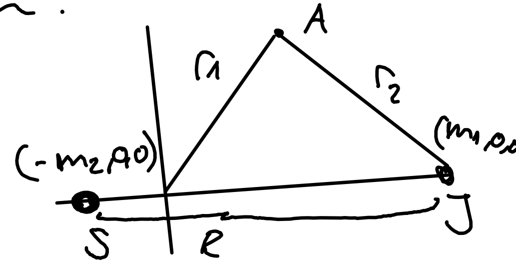
Da dieser in der Bahnebene liegt und zum Perihel (Punkt nächsten Abstandes) zeigt, ist klar, dass dieser Raumfest ist, weshalb wir keine Rosettenbahn haben

o) Kepler gilt für alle $\frac{1}{r}$ Potentiale (i.e. dito)

Dreikörperproblem: Lagrange

5.10.25

Wir betrachten Sonne-Jupiter-Asteroid aus Schwerpunktsystem von Sonne-Jupiter, mit vernachlässigtem Einfluss von Asteroid auf Sonne-Jupiter-System.



•) Der Einfachheit halber definieren wir $G=1$, $\omega=1$, $R=1$

$m_1+m_2=1$

•) Wir beachten Gravitation

$$\vec{G} = -\frac{m_1}{r_1^3}(y_1+m_2, y_2, y_3) - \frac{m_2}{r_2^3}(y_1-m_1, y_2, y_3)$$

Zentrifugalkraft $\vec{Z} = (y_1, y_2, 0)$

Corioliskraft $\vec{C} = 2(\dot{y}_2, -\dot{y}_1, 0)$

•) Und wir suchen nach GGW mit $\dot{y}_i = 0$

Wir erhalten $y_3 = 0$ und untersuchen

(1) Eulerscher Spezialfall: $y_2 = 0 \Rightarrow$ 3 Punkte auf Gerade

(2) Lagrange Spezialfall: $\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} = 1 \Rightarrow r_1 = r_2 = R$

↳ D.h. Asteroid ist auf Spitze des gleichseitigen Dreiecks.

↳ Lagrange Fixpunkte sind stabil für $\frac{m_S}{m_J} \gtrsim 27$

Schwingungsproblem, Propagator, generische Matrizen, Resonanz, invertiertes Pendel, linearer Rückkopplung 15.10.25

- Wir können Schwingungsprobleme $\ddot{x} = -fx - r\dot{x} + h(t)$ folgendermassen formulieren $\dot{\vec{z}} = A\vec{z} + b(t)$, wobei $\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x}/\alpha \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix}$, $\alpha = \sqrt{\frac{f}{m}}$, $\beta = \sqrt{\frac{r}{2m}}$
- Im homogenen Fall $\vec{b} = 0$ verwenden wir Propagator $\vec{z}(t) = P(t,s)\vec{z}(s)$. Dafür gilt

(1) $P(t,t) = \mathbb{1}$, (2) $\frac{\partial}{\partial t} P(t,s) = A(t) P(t,s)$

$P(t,s) = T\exp\left(\int_s^t dt_1 A(t_1)\right)$, oder falls $A(t) = A = \text{const} \Rightarrow P(t,s) = e^{A(t-s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-s)^n}{n!} A^n$

- generischen (natürlich, nicht konstruierte) sind invertierbar, und diagonalisierbar.
- Alternativ zum Propagator lässt sich DGL $\dot{\vec{z}} = A\vec{z}$ lösen und wir führen EW-Problem

  ↳ Lösung ist stabil, falls $Re(\lambda) \leq 0 \ \forall \lambda \in \sigma(A)$ und hat Form $x(t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} c_i e^{\lambda_i t}$

  ↳ $\alpha = \beta$ kritische Dämpfung $\Rightarrow 2f = r$
- Inhomogenes Problem $\dot{\vec{z}} = A\vec{z} + \vec{b}(t)$

Duhamel Formel: $\vec{z} = P(t,s)\vec{z}(s) + \int_s^t d\tau\, P(t,s)\, b(\tau)$

↳ $b(t) = b_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \vec{z} = e^{At}\left(\vec{z}(0) + \int_0^t d\tau\, e^{\tau(i\omega - A)}\vec{b}\right)$

$$\vec{z}(t) = \underbrace{e^{At}(\vec{z}(0) - \vec{a}(\omega))}_{\text{einschwingen}} + \underbrace{e^{i\omega t}\vec{a}(\omega)}_{\text{grosse } t}, \quad \vec{a}(\omega) = (i\omega - A)^{-1}\vec{b}$$

- invertiertes Pendel ist linear Rückkoppelbar, d.h. $\exists u$, s.d. $\dot{z} = Az + ub$, $z = \begin{pmatrix} \ell\theta \\ \ell\dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$, u ist Kraft

Doppeltes invertiertes Pendel nicht.

Brachistochron-Problem, Euler-Lagrange, Lagrange-Multiplier, Hamiltonsches Problem, Holonome Zwangsbedingungen 23.1.2025

- Schnellste Kurve, i.e. Lösung des Brachistochron-Problem sind Zykloiden.
- seien $f(x_0)$, $f(x_1)$ bekannt und vorgegeben.
  Suche Extremalwert von $S[f(x)] = \int_{x_0}^{x_1} dx\, s(f(x), f'(x), x)$
  Dafür soll für beliebige Fkt mit Null an Endpunkten h gelten $\frac{d}{d\alpha} S[f + \alpha h]\big|_{\alpha=0} = 0$
  wir finden Euler-Lagrange-Gleichung

  $$\boxed{\frac{\partial s}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial s}{\partial f'} = 0}$$

  → für mehrere Variablen haben wir mehr EL-Gleichung
- Lagrange-Multiplier falls wir Nebenbedingungen haben, z.B. eine Fkt $B() = C \Rightarrow$ dann nutzen wir

  $$S[f(x), \lambda] = \int_{x_0}^{x_1} s(f(x), f'(x), x) + \lambda(B(f(x), f'(x), x) - C)\, dx$$

  → so wird sichergestellt, dass Nebenbedingung erf. ist.
- Hamiltonsches Prinzip: Bewegungsgleichung der Mechanik als Extremalproblem formulieren. (Wichtig: $L = T - V$)
  Bsp $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, $V = V(x) \Rightarrow$ EL $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

  $\Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} V(x) = F$ → Newton.
- Holonome Zwangsbedingungen: Reduziere Problem auf Anzahl tatsächlicher Freiheitsgrade.

  $$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x}\right)\frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha} = 0 \quad , \text{wobei } \frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha}$$

  ein Tangentialvektor auf dem Konfigurationsraum ist $x(t) = x(q^\alpha(t), t)$.

Eich-Invarianz, Äquivalente Lagrange Fkt, zyklische Variable, konjugierter Impuls, t-Abhängigkeit, ~~Noether-Theorem~~ 2.11.21

---

o) BWGL für Teilchen $m, \vec{x}, e$ (Masse, Pos, Ladung)

$$m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}(\dot{\vec{x}} \times \vec{B}), \text{ mit } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

haben wir Eichfreiheit $\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}$

und $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, wobei $\chi(\vec{x}, t)$ beliebig ist.

wir können zeigen, dass $\vec{B}' = \vec{B}$ und $\vec{E}' = \vec{E}$ ist. D.h. BWGL sind Eich-Invariant.

o) Allgemein: Äquivalente Lagrange Fkt führen zu gleichen BWGL

$$L_1(q, \dot{q}, t) = L_2(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q(t), t)$$

$\Rightarrow$ Gleichen BWGL

o) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \Rightarrow q^\alpha$ ist <u>zyklische Variable</u> und $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$ ist erhalten.

Wir nennen $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$ den zu q^α konjugierten Impuls.

o) Falls $L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q})$ ist $\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \dot{q}^\alpha - L$ erhalten.

dies beschreibt oft die Energie des Systems.

Noether-Theorem, Prinzip von Maupertuis, Hamilton
Bogenlängenparametrisierung, 19.11.25

- Sei ϕ_λ eine kontinuierliche Symmetrie einer Lagrange Fkt. d.h. $L(\phi_\lambda(q(t)), \frac{d}{dt}\phi_\lambda(q(t)), t) = L(q(t), \dot q(t), t)$ mit erzeugenden Vektorfeld $v(q) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\phi_\lambda(q)|_{\lambda=0}$, so ist $\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha(t) v^\alpha(q(t))$ erhalten, d.h. $\frac{d}{dt}[\,] = 0$ für alle Lösungen $q(t)$ der EL-Gleichungen
- Ein Fluss $\phi^\lambda : \mathbb{R}^f \to \mathbb{R}^f, \lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt (1) $\phi^0 = id$, (2) $\phi^\lambda \circ \phi^\mu = \phi^{\lambda+\mu}$ und das dazugehörige Vektorfeld $v(q) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\phi^\lambda(q)|_{\lambda=0}$ ist analog zur Geschwindigkeit
- Wir können Noether zeigen indem wir EL anwenden und $\frac{d}{d\lambda}L$ berechnen und nutzen, das $\frac{d}{d\lambda}L = 0$ (kont. Sym)
- Prinzip von Maupertuis & Bogenlängenparametrisierung nicht bei Fetter diskutiert.
- Maupertuis: $\int \sqrt{E - V(q)}\, ds$ extremal, (ohne Parametrisierung der Kurve)
- Bogenlängenparametrisierung: Parametrisierung der Kurve, s.d. an jedem Punkt Argument der Kurve durch Länge der bis dort abgelaufenen Strecke ist.
- Hamiltonfkt ist $H(q^\alpha, p_\alpha, t) = \sum_\alpha p_\alpha \dot q^\alpha - L(q^\alpha, \dot q^\alpha, t)|_{\dot q = \dot q(q^\alpha, p_\alpha, t)}$ wobei diese oft Energie des mechanischen Systems repräsentiert.
- Bewegungsgleichungen sind dann Hamiltonsche Gleichungen
$$\dot q^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot p_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \quad \left(\text{und } \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\right)$$
$\Rightarrow$ Hamilton beschreibt System im Phasenraum mit q^α, p_α

Legendretransformation, Phasenraum, Poisson-Klammer, Poisson-Algebra, Kanonischen-Abbildungen 22.11.25

- Der Prozess der Konstruktion der Hamiltonfkt aus der Lagrange-fkt lässt Legendretransformation

$$H(q^\alpha, p_\alpha, t) = \sum_{\alpha=1}^{f} \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L(q^\alpha, \dot{q}^\alpha(q^\alpha, p_\alpha), t)$$

- Der Phasenraum ist $\mathbb{R}^{2f}$ mit $x = (q^1, p_1, \dots, q^f, p_f) \in \mathbb{R}^{2f}$
Dann gilt $\sum_{\alpha=1}^{2f} \varepsilon_{ih} \dot{x}_h = \frac{\partial H}{\partial x_i}$, wobei $\varepsilon = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$ ist

- Für $F(q^\alpha, p_\alpha)$ eine beliebige fkt im Phasenraum (d.h. Lösung der BWGL) $\frac{d}{dt} F(q^\alpha, p_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right) := \{F, H\}$
wobei $\{\cdot, \cdot\}$ die Poisson Klammer definiert.

- Für $F(q^\alpha, p_\alpha, t)$ im Ph.Space gilt $\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$
$\Rightarrow$ wir nennen $H(q^\alpha, p_\alpha, t) = H(q^\alpha, p_\alpha)$ autonomes System

- Poisson Klammer ist invariant unter Zeitentwicklung
d.h.
  - $\frac{d}{dt}(F \circ \phi^t) = \{F, H\}$
  - $\frac{d}{dt}\{F \circ \phi^t, G \circ \phi^t\} = \{\{F \circ \phi^t, G \circ \phi^t\}, H\}$
  - $\{F \circ \phi^t, G \circ \phi^t\} = \{F, G\} \circ \phi^t$

- F ist konstant in Zeit, falls $\{F, H\} = 0$

- Poisson Algebra $\mathcal{A}$ ist UR der $C^\infty(\mathbb{R}^{2f})$, $G, F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2f})$
mit kommutativem Produkt $\Rightarrow (F \cdot G)(x) = F(x) G(x)$
und Antisymmetrischem zweiten Produkt $\{F, G\} = -\{G, F\}$
mit $\{F, G_1 \cdot G_2\} = \{F, G_1\} G_2 + \{F, G_2\} G_1$

- Jacobi-Identität: $\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0$

- Kanonische Abbildungen $X \Rightarrow \bar{X}_i$ s.d. $H(x_1 \dots x_{2f}) = \bar{H}(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_{2f})$
$\forall$ Hamiltonfkt sind Koordinatentransformationen. erfüllen:
$A_{ih} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_h}$ — Jacobi-Matrix, $A^T \varepsilon A = \varepsilon \Rightarrow$ Symplektische Gruppe

- Fluss $\psi^\lambda : \mathbb{R}^{2f} \Rightarrow \mathbb{R}^{2f}$ ist kanonisch, falls $\psi^\lambda(x) = y(x, \lambda)$
gilt $v_i := \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} \Rightarrow \varepsilon v = (\varepsilon v)^T$ v ist vom Fluss erzeugtes Vektorfeld

Satz von Liouville, Wiederkehrsatz von Poincaré, 2.12.21
Erhaltungsgrösse mit Poisson, Hamilton Extremalprinzip
Hamilton – Jacobi

◦) <u>Liouville</u>: Das Phasenvolumen $\mu(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{2f}$ messbar, ist invariant unter Zeitentwicklung: $\mu(\phi_t(\Omega)) = \mu(\Omega)$
↳ gilt für alle kanonischen Abbildungen.

◦) <u>Poincaré</u>: ϕ_t ein Volumenerhaltender Fluss auf Phasenraum $\mathbb{R}^{2f}$
$G \subset \mathbb{R}^{2f}$, s.d. $\mu(G) < \infty$ und $\phi_t(G) = G \ \forall t$, $\Omega \subset G$

<u>Def</u> $x \in \Omega$ ist Wiederkehrpunkt bez Ω, falls $\forall T \ \exists t > T$ s.d. $\phi_t(x) \in \Omega$
⇒ Die Menge der Nicht-Wiederkehrpunkte in Ω ist von Volumen Null.

◦) F ist Erhaltungsgrösse, falls $\{F, H\} = 0$. $\left(\frac{d}{dt} F = 0\right)$
Sind F, G Erhaltungsgrössen, dann ist $\{F, G\}$ erhalten.

◦) Das ~~Extremal~~ Prinzip für Hamilton-BWGL ist

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \left(\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(q^\alpha, p_\alpha) \right) dt = 0, \text{ wobei}$$

$L = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(q^\alpha, p_\alpha)$ ist, also gleich wie Lagrange
↳ daraus sehen wir $\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$ und $\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$

◦) Idee von H-J ist $X = (q^1, p_1 \dots q^f, p_f) \xrightarrow{\text{kanonisch}} \bar{X}(Q^1, P_1 \dots Q^f, P_f)$
s.d. $\boxed{H(Q^\alpha, P_\alpha) = P_f}$ d.h. BWGL $\dot{P}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial Q^\alpha} = 0$

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha \neq f \\ 1 & \alpha = f \end{cases} \Rightarrow P_\alpha = \text{konst}, \ Q_\alpha = \text{konst} \ \ Q_f = Q_f(0) + t$$

◦) <u>Kanonischen Transformation finden</u>
Finde $S(q_\alpha, P_\alpha, t)$ s.d. $\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha$, $\frac{\partial S}{\partial P_\alpha} = Q^\alpha$, $\frac{\partial S}{\partial t} = K - H$

$Q^\alpha = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha}(q^\alpha, P_\alpha, t)$ ↦ umstellen nach $q^\alpha = q^\alpha(Q^\alpha, P_\alpha, t)$

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha(q^\alpha, P_\alpha, t) = p_\alpha(q^\alpha(Q^\alpha, P_\alpha, t), P_\alpha, t) = p_\alpha(Q^\alpha, P_\alpha, t)$$

umstellen geht nur, falls $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^\alpha \partial P_\alpha}\right) \neq 0$

Starre Körper, Kreisel, Euler Winkel, Hauptdiagonalsystem, 3.12.25
Eulersche BWGL (freie Kreisel), Stabilität, (schwerer) Symmetrischer Kreisel

---

∘) Im starren Körper sind Relativabstände der Massepunkte konstant → 6 Freiheitsgrade (Schwerpunkt + Ausrichtung)

∘) Ein Kreisel ist ein starrer Körper mit fixiertem Pkt → 3DoF
$\vec{x} = R\vec{y}$, wobei $\vec{x}$ Raumfest und $\vec{y}$ körperfest ist $R \in SO(3)$

∘ Eulerwinkel ist intuitive Schreibweise $R(\varphi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & -s\theta\\ 0 & s\theta & c\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\psi & -s\psi & 0\\ s\psi & c\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

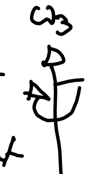
∘) $\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}) = \sum_i m_i (R\vec{y}_i \times \dot{R}\vec{y}_i)$, $\Omega = R^T \dot{R}$, $\Omega \vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}$

Wir definiere Trägheitstensor Θ, $\Theta_{jk} = \sum_i m_i ((\vec{y}_i \cdot \vec{y}_i)\delta_{jk} - (\vec{y}_i)_j (\vec{y}_i)_k)$
$\vec{L} = R\vec{S}$, wobei $S_j = \sum_{k=1}^{3} \Theta_{jk}\omega_k$, wir wissen ausserdem $\Theta_{jk} = \Theta_{kj}$, d.h. Θ ist diagonalisierbar im Hauptachsensys.
$\Theta = \begin{pmatrix}\theta_1 & & 0\\ & \theta_2 & \\ 0 & & \theta_3\end{pmatrix}$, $\vec{L} = R\Theta\vec{\omega}$, Es gilt $T = \frac{1}{2}\sum_i \Theta_i \omega_i^2$

∘) Auf ~~den~~ freien Kreisel wirkt keine Kraft, d.h. $\dot{\vec{L}} = M = 0$
Daraus folgt Eulersche BWGL
$\Theta_1\dot{\omega}_1 = (\Theta_2 - \Theta_3)\omega_2\omega_3$, $\Theta_2\dot{\omega}_2 = (\Theta_3 - \Theta_1)\omega_1\omega_3$, $\Theta_3\dot{\omega}_3 = (\Theta_1 - \Theta_2)\omega_1\omega_2$
Diese sind nicht linear, d.h. Lösungsform keine VR.
Es folgt $\dot{E} = 0$, $2E = (\vec{\omega}, \Theta\vec{\omega}) = (\vec{L}, R\vec{\omega})$
→ Dies beschreibt Ellipsengleichung und Ebene, mit einzigem Schnittpunkt $\vec{\omega}$

∘) Betrachte die Lösungen, in dem nur jeweils $\omega_i^0 \neq 0$, $i \in \{1,2,3\}$
→ Stabilität kann untersucht werden mit kleinem stören ω_j
→ $\begin{pmatrix}\dot{\omega}_2\\ \dot{\omega}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_2}\omega_1^0\\ \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_3}\omega_1^0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}$ $\lambda \in i\mathbb{R}$ stabil

EW $\lambda^2 = \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_2}\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_3}\omega_1^{0\,2}$, falls $\lambda \in \mathbb{R}$ instabil



∘) Symmetrisch, falls $\Theta_2 = \Theta_1 \Rightarrow \omega_1 + i\omega_2 = (\omega_1 + i\omega_2)(0)e^{-i\alpha t}$
wobei $\frac{\alpha}{\omega_3} = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1}$ die Präzessionsbewegung charakterisiert
→ z.B. Erde hat $\omega_3 = \frac{1}{\text{Tag}}$, $\frac{\alpha}{\omega_3} \approx 0.0033 \sim 300$ Tage Periode

∘) Im Schwerefeld $U = mgl\cos\theta$, wobei wir drei Rotationen
$\vec{e}_\psi = (0,0,1)$, $\vec{e}_\theta = (\cos\psi, -\sin\psi, 0)$, $\vec{e}_\varphi = (\sin\theta\sin\psi, \sin\theta\cos\psi, \cos\theta)$
$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_\psi + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ haben. Wir können $L = T - V$ berechnen und sehen φ, ψ und t sind zyklisch
⇒ 3 Erhaltungsgrößen, $T+V$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ → integrables Problem

Schwerer Symmetrischer Kreisel 10.12.25
Schneller Kreisel

φ – Rotation um $\hat{e}_3$ im Raumsystem

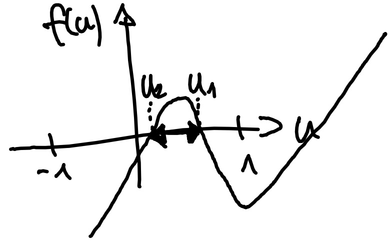
θ – Winkel der Figurenachse relativ zu $\hat{e}_3$

ψ – Rotation um Figurenachse

- Erhaltungsgrösse $M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \dot\varphi\, \Theta_1 \sin^2\theta + (\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\Theta_3\cos\theta$

  $M_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = (\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\,\Theta_3$, $E = \frac{\Theta_1}{2}\dot\theta^2 + \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2\Theta_1\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$

- $u = \cos\theta$, $\dot u^2 = f(u)$



D.h. u läuft hin und her zwischen u_1 & u_2 mit

$$T = 2\int_{u_1}^{u_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

Daraus finden wir $\dot\varphi$ ist Periodisch mit T

und $\varphi = (\text{Konst}\cdot t) + \left(\begin{matrix}\text{Periodisch in } T\\ \text{mit Periode } T\end{matrix}\right)$

- Falls $\dot\varphi$ Vorzeichen ändert haben wir Schleifen
- Schneller Kreisel $\frac{1}{2}\Theta_3\dot\psi(0)^2 \gg mgl$, $\dot\theta(0) = \dot\varphi(0) = 0$, $\cos\theta_0 \neq 1$

  ↳ wir sehen, dass die Amplituden der Nutation mit $\sim\frac{1}{\dot\psi^2(0)}$ geht

  ↳ Daher haben wir kleine Nutationsamplituden.

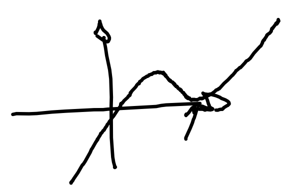
  wir sehen, dass die Nutationsfrequenz mit $\sim\dot\psi(0)$ geht.

  ↳ Präzessionsbewegung $\dot\varphi \to \bar{\dot\varphi}$ geht mit $\frac{1}{\dot\psi(0)}$

- Wir sehen, dass für die reine Präzessionsbewegung $\dot\varphi \neq 0$ und $\theta_0 = 0$ instabil ist

  ↳ schlafender Kreisel, falls

  $\dot\psi^2(0) > 4\cdot\frac{mgl\Theta_1}{\Theta_3^2}$



SRT, Minkowski-Metrik, Lorentz-Transformation, orthochrone Lorentzgruppe, Boosts, Geschwindigkeitsaddition, 14.12.25
Eigenzeit, 4-er Geschwindigkeit/Impuls, Zeitdilatation/Raumkontraktion

---

- SRT beruht auf (1) Physikalische Gesetze sind in $\forall$ Inertialsys gleich und (2) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.
- schreiben $x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3)$, $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$, $(x,x) := \sum_{\mu,\nu=0}^{3} x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$
- Lorentztransformation sind lin. Abb Λ s.d. $\Lambda^T g \Lambda = g \Rightarrow \hat{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$
  bilden Gruppe 1) $\det \Lambda = \pm 1$, 2) $1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 \Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$
- Sei $L_+^\uparrow$ die eigentlichen orthochronen Unter-Lorentzgruppe $\det \Lambda = 1$, $\Lambda^0{}_0 \geq 1$
  ↳ Jedes $\Lambda \in L_+^\uparrow$ lässt sich schreiben als $\Lambda = \Lambda(R_1)\Lambda(u)\Lambda(R_2)$
  ↳ $\Lambda(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right)$ $R \in SO(3)$ „Rotationen", $\Lambda(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,u & -\mathrm{sh}\,u & \\ \mathrm{sh}\,u & \mathrm{ch}\,u & 0 \\ 0 & & \mathbb{1} \end{pmatrix}$ „Boosts"
  ↳ wir finden $\cosh u = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $\sinh u = \frac{v}{c}\gamma$
- Geschwindigkeitsaddition $v_{ges} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$

- Wir sagen Zeitartig $\hat{=}\ (x^\mu, x^\mu) > 0$, Raumartig: < 0, Lichtartig: $= 0$
  ↳ Parametrisierungsunabhängig
- Bogenlänge $s \rightarrow$ Eigenzeit τ wobei $\tau = \frac{s}{c}$ $\quad d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$
- Wir definieren 4-er Geschwindigkeit $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \vec{v})$, $\hat{u}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu$
- 4-er Impuls $p^\mu = m u^\mu = m\gamma(c, \vec{v})$, $(p^\mu, p^\mu) = m^2 c^2$
- In der SRT gilt Impulserhaltung aber i.A. keine Massenerhaltung (Teilchenzerf
- Zeitdilatation: $\Delta\hat{t} = \gamma \Delta t > \Delta t$, Raumkontraktion: $\hat{L} = \gamma^{-1} L < L$
- Für Masselose Teilchen u.a. Photon gilt $(p^0)^2 - (\vec{p})^2 = 0 \Rightarrow p^\mu = (|\vec{p}|, \vec{p})$