1 Wellen

Die **Wellenfunktion** ist gegeben durch $\xi = \xi(x,t) = f(x \pm vt)$, wobei "+" eine verschiebung nach links und "-" eine nach rechts ist.

Die **Harmonische Welle** lässt sich beschreiben durch

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(k(x \pm vt)) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t) = \mathrm{Re}(e^{i(kx \pm \omega t)})$$

Dabei sind folgende Grössen gegeben:

Wellenzahl/Wellenvektor	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	Anzahl Wellen pro Längeneinheit	m^{-1}
Amplitude	$\xi_0 = A$	Grösste Auslenkung	
Wellenlänge	λ	Abstand zweier Wellenberge	m
Kreisfrequenz	$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = kv$	f ist Frequenz und T die Periode	s^{-1}
Phasengeschwindigkeit	$v = \frac{\omega}{k} = \lambda f$	Geschwindigkeit einer vorgegeben Phase	ms^{-1}
1D-Welle	$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$	Lösung: $\xi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$	

Transversalwelle Auslenkung senkrecht zur Bewegungsrichtung z.B. Seilwelle, EM-Welle

Longitudinalwelle Auslenkung in Bewegungsrichtung z.B. Welle im Festkörper, Schall, Federkette

elastische Seilwelle Dabei ist die Phasengeschwindigkeit gegeben durch: $v = \sqrt{\frac{S}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{A\rho}}$, wobei S die Zugsapnnung (Wirkende Kraft auf Queerschnitt) und ρ die Massendichte ist.

Welle im Festkörper Die Phasengeschwindigkeit im Festkörper oder der Federkette ist gegeben durch: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{A\rho}\frac{l}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \varepsilon_l}}$, wobei σ die Normalspannung (senkrecht wirkende Kraftkomponente pro Fläche) und E das Elastizitätsmodul ist. Dabei gilt oft das **Hooksche Gesetz:** $\varepsilon_l = \frac{\sigma}{E}$

Ebene Wellen Auf jeder Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtunng hat die Welle gleiche Phase.

lineare Polarisation Gleiche Phasengeschwindigkeit, gleiche Phase, Verhältnis von $\frac{\xi_x}{\xi_y} = const.$

zirkuläre Polarisation Gleiche Phasengeschwidnigkeit, Phasenunterschied von $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$,Amplituden beider Wellen sind gleich $A_x = A_y$

eliptische Polarisation Gleiche Phasengeschwindigkeit, Phasendifferenz $\delta \neq n\pi$. (Zirkulär ist spezialfall von eliptisch)

Wellen in 3D	$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \Delta\xi = 0$	wobei $\Delta = \nabla^2$	
Kugelwellen	$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r})\vec{\xi}$	Lösung ist $\vec{\xi}(\vec{r},t) = \frac{\vec{A_1}}{r} f(kr - \omega t) + \frac{\vec{A_2}}{r} g(kr + \omega t)$ = "Ein" + "Aus"	
kin. Energiedichte	$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2}\rho(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t})^2$		$\mathrm{J \cdot m^{-3} = kg \cdot s^{-2} m^{-1}}$
elas. Energiedichte	$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2}E(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x})^2$	von Hookscher potentieller Energie hergeleitet	$\mathrm{J \cdot m^{-3} = kg \cdot s^{-2} m^{-1}}$
totale Energiedichte	$\frac{dW}{dV} = \rho v^2 (\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x})^2$	Hilfe: $\xi(x,t) = f(u)$ mit $u = x - vt$, $v^2 = \frac{E}{\rho}$	$\mathrm{J \cdot m^{-3} = kg \cdot s^{-2} m^{-1}}$
mittlere Energiedichte	$\langle \frac{dT}{dV} \rangle = \frac{1}{4}\rho\omega^2 A^2$	für harmonische Wellen mit KF ω und Amp A	$\mathrm{J \cdot m^{-3} = kg \cdot s^{-2} m^{-1}}$

Poynting-Vektor Der Poynting-Vektor ist die Energieflussdichte (Energie pro Fläche pro Zeit oder Leistung pro Fläche) und zeigt in Richtung der Flächennormale mit $\vec{S} = \frac{1}{A}\frac{dW}{dt}\frac{\vec{a}}{a}$. Die Intensität ist dann gegeben durch $I = |\vec{S}|$ und wird auch Energiestrom genannt.

mittlere Intensität	$\langle I \rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v = \frac{\langle P \rangle}{A}$ für harmonische Wellen	$\frac{\text{J}}{\text{m}^2\text{s}} = \text{kgs}^{-3}$

Beispiele Die mittlere Leistung einer Kugelwelle ist $\langle P \rangle = 2\pi\rho v\omega^2 A_0^2$. Die Gesamtenergie einer Ebenen Welle in einem Volumen V ist gegeben $W = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 V$ und die einer Saite mit Länge l und linearer Massendichte λ durch $W = \frac{1}{4}\lambda\omega^2 A_0^2 l$.

Superposition Superposition von Wellen ist Erklärung für alle Interferenzphänomene. Betrachte dafür jeweils die Superposition der Wellne und finde Interferenzextrema.

Kohärenz Wir nennen zwei Wellen kohärent, wenn ihre Phasendifferenz zeitlich konstant ist, d.h. $\omega_1 = \omega_2$ gilt.

Reflexion und Transmission Wir haben einlaufende Welle $\xi_A(x,t) = Ae^{i(k_1x-\omega t)}$, die reflektierte Welle $\xi_R(x,t) = Re^{i(-k_1x-\omega t+\delta_R)}$ und die transmittierte Welle $\xi_T(x,t) = Te^{i(k_2x-\omega t+\delta_T)}$.

$$R = \left|\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right| A, \quad T = \frac{2A}{1+\alpha}, \quad \alpha = \frac{k_2 S_2}{k_1 S_1} = \sqrt{\frac{S_2\rho_2}{S_1\rho_1}}$$

$\alpha > 1$ Reflexion am harten Medium. Bei $\alpha \to \infty$ haben wir vollständige Reflexion $R = A$, keine Transmission $T = 0$ mit Phasensprung $\delta_R = \pi$.

$\alpha = 1$ Totale Transmission $T = A$ keine Reflektierte Welle $R = 0$ und keinen Phasensprung.

$\alpha < 1$ Reflexion am weichen Medium. Bei $\alpha \to 0$ haben wir vollständige Reflexion $R = A$ ohne Transmission und Phasensprung.

Stehende Wellen Voraussetzung sind zwei entgegenlaufende kohärente Wellen. Ein Beispiel ist vollständige reflexion einer Seilwelle (loses oder festes Ende). Zwei Knoten (bzw zwei Bäuche) haben dann jeweils einen Abstand von $\frac{\lambda}{2}$.

beidseitig eingespannt Wir haben $n = \frac{2l}{\lambda}$ Bäuche, die Wellenzahl ist gegeben durch $k_n = \frac{n\pi}{l} = \frac{2\pi}{\lambda}$ und damit die Eigenkreisfrequenzen mit $\omega_n = k_n v = n\omega_1 = n\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{S}{\rho}}$. Die Grundfrequenz hängt also von den Seileigenschaften ρ, S, l ab. Und die n-te Normalenschwingung lautet somit mit Koeffizienten a_n und b_n aus Anfangsbedingungen $\xi_n(x,t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos(\omega_n t) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin(\omega_n t)$.

einseitig eingespannt Wir haben $n = \frac{4l+\lambda}{2\lambda}$ Bäuche, die Wellenzahl ist gegeben durch $k_n = \frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{l}$ und damit die Eigenkreisfrequenzen mit $\omega_n = k_n v = (2n-1)\omega_1 = \frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{S}{\rho}}$. Die Grundfrequenz hängt also von den Seileigenschaften ρ, S, l ab.

Huygens Jeder Punkt einer Wellenfront wird als Quelle einer neuen Elementarwelle betrachtet. Die Umhüllende ist dann die Wellenfront.

Interferenz bei N Quellen Wenn wir N Spalten/Quellen von Kugelwellen mit gleicher Amplitude a, haben ist die Amplitude gegeben durch die Superposition $\xi(\alpha, r, t) = \frac{a}{r}\frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)}e^{i(kr-\omega t)}$. Hierbei ist $\Delta\varphi$ abhängig von der Distanz zweier Punkte, dem Winkel α und k. Für die Intensität gilt $\langle I \rangle \propto |\xi|^2$.

Einzelspalt	$\langle I \rangle \propto A^2 \frac{\sin^2(\Delta\varphi/2)}{(\Delta\varphi/2)^2}$	Obige Formel für $N \to \infty$, $Na = A = const.$
Reflexion	$\alpha_1 = \alpha_2$	"Einfallswinkel" = "Ausfallswinkel"
Brechung nach Snell	$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$	$n = \frac{c}{c_i}$ ist Brechungsindex, Totalreflexion bei $\sin(\alpha_2) = \frac{c_2}{c_1}\sin(\alpha_1) > 1$

Dispersion Verformung einer Welle über Zeit. Gruppengeschwindigkeit gibt an wie schnell sich ein Wellenpaket bewegt. Es gilt im allgemeinen $v_{ph} \neq v_g \leq c$.

Dopplereffekt	$f_B = f_Q\frac{c+v_B}{c-v_Q}$	$v_Q > 0$ falls Quelle $\to$ Beobachter, $v_B > 0$ falls Beobachter $\to$ Quelle
Mach'sche Zahl	$\vartheta = \arcsin\left(\frac{c}{v_Q}\right)$	$M_Z = \frac{v_Q}{c} > 1$ je grösser ϑ, desto stumpfer der Schallkegel.

2 Elektrostatik

Ladung Ladung ist erhalten und relativistisch invaraint. Protonenladung: $e = 1.602 \cdot 10^{-19}\text{C}$

Elektrostatisches Feld	Statische Ladung, also $\vec{j}=0$, oder $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=0$ bzw. $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0$		
Coulombkraft	$\vec{F}_{01}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0Q_1}{(\vec{r_0}-\vec{r_1})^2}\frac{\vec{r_0}-\vec{r_1}}{\lvert\vec{r_0}-\vec{r_1}\rvert}$	elektrische Feldkonstante $\varepsilon_0=8.854\cdot10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$	
Energie in Verteilung	$W=\int_\infty^{r_{21}}-F_{21}(r)\cdot ds=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_{21}}$		
Earnshaw	Ein System stationärer Ladungen hat an Ladungsfreien Orten keine stabilen Gleichgewichte.		
E-Feld	$\vec{E}=\frac{\vec{F_C}}{q}$	Coulombkraft auf Testladung q	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$
E-Feld Ladungsverteilung	$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{r'})}{(\vec{r}-\vec{r'})^2}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{\lvert\vec{r}-\vec{r'}\rvert}dV'$		$dq=\rho dV$

Verteilung	**E-Feld**
Punktladung q	$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$
Unendlicher Draht (Linienladung λ)	$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\,\rho}\hat{\rho}$
Unendliche Fläche (Flächenladung σ)	$\mathbf{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$
Parallele Platten $\pm\sigma$ (zwischen Platten)	$\mathbf{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$
Unendlicher homogener Zylinder (Radius R, Dichte ρ)	$\mathbf{E}(r<R)=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r},\quad \mathbf{E}(r\geq R)=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r}$
Homogene Kugel (Radius R, Dichte ρ)	$\mathbf{E}(r<R)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\hat{r},\quad \mathbf{E}(r\geq R)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$
Kugeloberfläche (dünne Schale, Ladung Q)	$\mathbf{E}(r<R)=0,\quad \mathbf{E}(r\geq R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$
Leitende Kugel (Radius R, Ladung Q)	$\mathbf{E}(r<R)=0,\quad \mathbf{E}(r\geq R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$
Geladener Ring (Radius a, Achse z)	$E_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,z}{(z^2+a^2)^{3/2}}$
Geladene Scheibe (Radius a, Achse z)	$E_z=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)$
Dipol (Fernfeld, Moment $\mathbf{p}$)	$E_r=\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\quad E_\theta=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

E-Fluss	$\Phi=\int_{\partial V}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$		$\mathrm{Vm}=\frac{\mathrm{kgm}^3}{\mathrm{Cs}^2}$
Gauss	$\Phi=\int_{\partial V}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}=\frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0}$	Alternativ: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	
Energie im E-Feld	$U_E=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E^2\mathrm{d}V$	mit der Energiedichte/Druck $u_E=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2$	$\mathrm{J}=\mathrm{Nm}$
Konservatives E-Feld	Ein Potential existiert mit $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$, das E-Feld ist rotationsfrei $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ bzw. $\oint\vec{E}\mathrm{d}\vec{s}=0$, $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$.		
Potential	$\phi_{\mathrm{BA}}=-\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{s}$	Arbeit pro Ladung bei Verschiebung A $\to$ B	V
	$\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{r'})}{\lvert\vec{r}-\vec{r'}\rvert}\mathrm{d}V$	Die Potentielle Energie ist dort $q\phi$	
Poisson	$\Delta\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	Und Laplace ist dann $\Delta\phi=0$ im Ladungsfreien Fall	
Arbeit	$W_{\mathrm{BA}}=q\cdot\phi_{BA}$	Ladung q, Verschiebung A $\to$ B	$\mathrm{VC}=\mathrm{J}$

3 Elektrische Leiter und Ströme

Leiter In einem Leiter sind Ladungen sehr mobil. Daraus folgt $\vec{E}=0$ im Material, aus Gauss folgt daraus direkt, dass die überschlüssigen Ladungen auf der Leiteroberfläche sein muss. Das heisst auch, der ganze Leiter insbesondere die Oberfläche ist eine Aequipotentialbereich.

E-Feld des Leiters $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ $\vec{n}$ ist Normalenvektor, σ ist lokale Oberflächenladungsdichte

Spitzenwirkung Die lokale Ladungsdichte ist grösser bei kleinerem Krümmungsradius. Das heisst Spitzen und Ecken haben grössere E-Felder.

Elektrostatisches Problem Betrachte Leiter im Vakuum (Laplace gilt). Dirichlet-Randbedingung heisst, ϕ ist für alle Leiter definiert. Neumann-Randbedingung heisst die Ladung Q ist für alle Leiter definiert.

Eindeutigkeitssatz Falls für ein elektrostatisches Problem eine Lösung existiert, so ist diese eindeutig.

Influenz Verschiebung von Ladungen in einem Leiter durch eine externe Ladungsverteilung. Durch erdung des Leiters können Ladungen abfliessen und somit der Leiter geladen werden.

Faraday'scher Käfig Das innere eines von einem Leiter Umgebenen Bereich ist von äusseren E-Feldern abgeschirmt. Eine Ladung sei im inneren eines Leiters. Dann ist die Ladung im inneren gleich die Ladung auf der äusseren Leiteroberfläche. Die Umgebung hat keine Information über die Bewegung der Ladung.

Spiegelladung Falls wir ein System von Ladungen finden können, sodass eine Äquipotentialfläche gerade die Oberfläche eines Leiters beschreibt, so sind die resultierenden Felder bzw. Potentiale auch Lösungen für den Fall eines so geformten Leiters.

Stromstärke $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = nA\bar{v}q = \bar{v}\lambda$ Bewegte Nettoladung, λ ist linienladungsdichte $\mathrm{A} = \mathrm{Cs}^{-1}$

Anzahl Ladungsträger $\Delta N = nA\Delta x = nA\bar{v}\Delta t$ n ist Anzahldichte in m^{-3}

Stromdichte $\vec{J} = nq\vec{v}$ Es gilt $I = \int_A \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{a}$ $\mathrm{Am}^{-2} = \mathrm{Cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$

Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$ Ladungserhaltung, keine Maxwellgleichung aber ähnlich wichtig

4 Kondensatoren

Kapazität $C = \frac{Q}{\phi}$ Proportionalitätskonstante, $\phi = U$ $\mathrm{F} = \mathrm{CV}^{-1}$

Plattenkondensator $C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$ Das E-Feld ist dann homogen mit $E = \frac{V}{d}$

Energie $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$ $\mathrm{J} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}$

Kombinationen $C_\| = \sum C_i$ $\mathrm{C}_\& = (\sum \frac{1}{C_i})^{-1}$

Kondensator	**Kapazität** C
Plattenkondesator mit Dielektrikum ε	$C = \varepsilon_0\varepsilon\frac{A}{d}$
Platten, N Schichten (seriell: Dicken d_i, ε_i)	$C = \frac{\varepsilon_0 A}{\sum_i d_i/\varepsilon_i}$
Kugelkondensator Radien $r_i < r_a$	$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{r_a r_i}{r_a - r_i}$
Koaxialer Zylinder Radien $r_i < r_a$	$C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{L}{\ln(r_a/r_i)}$

5 Spezielle Relativitätstheorie

Einsteins Postulate 1. Ist K ein Inertialsystem und K' gleichförmig dazu bewegt, so ist K' auch ein Inertialsystem. 2. Die Naturgesetze stimmen für alle Inertialsysteme überein. 3. Das Licht breitet sich in jedem Inertialsystem gleich schnell aus. Mit der Lichtgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 2.99\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Lorentz-Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ wobei $\beta = \frac{v}{c}$

Zeitdilatation $\Delta t = \gamma\Delta t'$ kürzestes Zeitintervall im System, wo beide Eregnisse am selben Ort sind

Lorentzkontraktion $\ell' = \gamma\ell$ Bewegte längen sind kürzer

Lorenztransformation

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(ct-\beta z) \\ x \\ y \\ \gamma(z-\beta ct) \end{pmatrix}$$

Addition rel. (∥) Geschwindigkeiten	$v' = \frac{v - v_{rel}}{1 - \frac{v v_{rel}}{c^2}}$	K' bewegt sich mit v_{rel} relativ zu K. D.h. $v = \frac{v' + v_{rel}}{1 + \frac{v' v_{rel}}{c^2}}$
Addition rel.(⊥) Geschwindigkeiten	$v'_{\perp} = \frac{v_{\perp}}{\gamma(1 - \frac{v_{\parallel} v_{rel}}{c^2})}$	Achte auf das $v_{\parallel}$ im Nenner. Analog $v_{\perp} = \frac{v'_{\perp}}{\gamma(1 + \frac{v'_{\parallel} v_{rel}}{c^2})}$
Gleichzeitigkeit	Zwei Ereignisse finden gleichzeitig statt, wenn die davon ausgesendeten Lichtsignale einen in der Mitte stehenden Beobachter gleichzeitig erreichen. Gleichzeitigkeit ist relativ!	
Raumzeit-Intervall	$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$	Lorenzinvariant. Zeitartig $\Delta s^2 > 0$, Raumartig$\Delta s^2 < 0$, Licht $\Delta s^2 = 0$
Eigenzeit	$c\Delta\tau = \sqrt{\Delta s^2}$	Falls raumartig betrachte Eigenlänge $\Delta\ell = \sqrt{-\Delta s^2}$
Dopplereffekt longitudinal	$f' = f\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$	**Positive** v für grösser werdende Abstände und Rotverschiebungen
Dopplereffekt allgemein	$f' = f\gamma(1 - \beta\cos\theta)$	alternativ für θ' in K' wiefolgt $f' = \frac{f}{\gamma(1+\beta\cos\theta')}$
Photonenergie	$E_\gamma = hf = p_\gamma c$	Daraus folgt $p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{hf}{c}$
Ruheenergie	$E_0 = mc^2$	Dabei ist m die Ruhemasse
Gesamtenergie	$E_{tot} = E_0 + E_{\text{kin}} = \gamma mc^2$	Daraus folgt $E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)mc^2$
Impuls	$\vec{p} = \gamma m\vec{v}$	Als Vierervektor schreiben wir $p^{\mu} = \begin{pmatrix} E_{tot}/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$
Lorenzinvarianz der Masse	$E^2 - \vec{p}^2c^2 = m^2c^4$	Folgt aus $p^2 = p^{\mu}p_{\mu}$
Kräfte	$\vec{F} = m\gamma\vec{a} + \frac{m\gamma^3}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}$	alternativ $m\gamma\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{c^2}(\vec{F}\cdot\vec{v})\vec{v}$, folgt aus $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$
Kraft ∥	$\frac{1}{v^2}(\vec{F}\cdot\vec{v})\vec{v}$	Daraus folgt $\vec{F_{\parallel}} = \gamma^3 m\vec{a}_{\parallel}$
Kraft ⊥	$\vec{F} - \frac{1}{v^2}(\vec{F}\cdot\vec{v})\vec{v}$	Daraus folgt $\vec{F_{\perp}} = \gamma m\vec{a}_{\perp}$
Transformationen von E-Felder	$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + c\vec{\beta}\times\vec{B}_{\perp})$	Für die parallele Komponente gilt $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$
Transformationen von B-Felder	$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}_{\perp})$	Für die parallele Komponente gilt $\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$

6 Magnetfelder

Lorentzkraft	$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$	Oder infinitesimal $\mathrm{d}\vec{F}_L = I(\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B})$ - beachte RHR
Ampère'sches Gesetz	$\oint_C \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I_{\text{eing}}$	Alternativ $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$, für langen draht $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ - RHR
keine Monopole	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	zweite Maxwellgleichung
Vektorpotential	$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$	Daraus folgt $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$
Vektorpotential	$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\vec{J}(\vec{r'})}{\lvert\vec{r}-\vec{r'}\rvert}\mathrm{d}V$	Verwende Coulomb eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ $\quad \mathrm{Tm} = \mathrm{kgmC^{-1}s^{-1}}$

Biot-Savart'sches Gesetz $\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \mathrm{d}\vec{\ell} \times \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}(\mathrm{d}\vec{\ell} \times \hat{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}(\vec{J} \times \hat{r})\mathrm{d}V$ folgt aus $\mathrm{d}B = \nabla \times \mathrm{d}A$

Beispiel B-Feld $\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2}(\vec{v} \times \hat{r})$ Punktladung q auf Kreisbewegung mit Radius r und $\vec{v}$

Energie im B-Feld $U_B = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2 \mathrm{d}V$ mit der Energiedichte $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Energie im E-Feld $U_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E^2 \mathrm{d}V$ mit der Energiedichte $u_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

Hall-Effekt Möglichkeit zur Bestimmung des Ladungsträgervorzeichen. Betrachte zwei parallele Platten mit B-Feld parallel zu den Platten. Weiter fliesst ein fixierter Strom senkrecht zum B-Feld und parallel zu den Platten. Wegen der Lorentzkraft trennen sich die Ladungen. Aus Spannung lässt sich Vorzeichen der Ladungsträger bestimmen.

magnetisches Fluss $\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ Fluss durch Oberfläche $\vec{A}$ $\mathrm{Wb} = \mathrm{kgm^2C^{-1}s^{-1}}$

Induzierte Spannung $U_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$ auch elektromotorische Kraft, for some reason...

Faraday'sches Gesetz $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ dritte Maxwellgleichung

Lenz'sche Regel Die magnetisch induzierte elektromotorische Kraft erzeugt ihrerseits ein Magnetfeld, das der Änderung des Flusses entgegenwirkt.

Selbstinduktivität $U_{ind} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ und $\Phi_B = LI$ $\mathrm{H} = \mathrm{kgm^2C^{-2}}$

Magnetfeld einer Spule $B = \mu_0 I \frac{N}{\ell}$ Daraus folgt $L = \mu_0 \frac{AN^2}{\ell}$

Gegenseitige Induktivität $M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$ Es gilt $M_{21} = M_{12}$ $\mathrm{H} = \mathrm{kgm^2C^{-2}}$

Energie in Induktivität $W = \frac{1}{2}LI^2$ Gesamte Energie ist im B-Feld, weshalb auch $W = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2 \mathrm{d}V$

7 Schaltkreise und Wechselstrom

Kirchhoff'sche Maschenregeln

1. KHMR $V_i = Z_i I_i$ Ohm'sches Gesetz, wobei Z_i die Impedanz ist

2. KHMR $\sum_i I_i = 0$ keine Ladungsansammlung

3. KHMR $\sum_i V_i = 0$ Für jede Schlaufe addieren sich die Spannungen zu Null

Leistung $P = \dot{W} = IU$ für reine Widerstände $P = I^2 R = \frac{V^2}{R}$

Kondensator entladen $I(t) = -\frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$ folgt aus $V_C + V_R = 0$

Spule entladen $I(t) = I_0 e^{-tR/L}$ folgt aus $V_L + V_R = 0$

Komponente	R	C	L
Spannungsabfall U	$V_R = IR$	$V_C = -\frac{Q}{C}$	$V_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$
Impedanz Z	R	$-\frac{i}{\omega C}$	$i\omega L$
Admitanz Y	$\frac{1}{R}$	$i\omega C$	$-\frac{i}{\omega L}$
Phasenwinkel $\phi = \arg Z$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}$

RLC-Schwinkreis Energie osziliert zwischen E-Feld in der Kapazität und B-Feld in der Induktivität - Widerstand dämpft. Es gilt $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ und $\rho = \frac{R}{2L}$.

$\rho^2 < \omega_0^2$ $V(t) = V_0 \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$ Schwache Dämpfung

$\rho^2 > \omega_0^2$	$V(t) = A\exp(-\beta_1 t) + B\exp(-\beta_2 t) \quad \text{mit} \quad \beta_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$	Starke Dämpfung
$\rho \approx \omega_0$	$V(t) = A\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)(1+Bt)$	Kritische Dämpfung

Wechselstrom-generator Betrachte eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit drehende Leiterschlaufe im homogenen Magnetfeld. Die Induzierte Spannung bzw der induzierte Strom ist harmonisch.

RLC-Stromkreis RLC-Schwinkreis mit zusätzlicher Spannungsquelle. Dabei haben wir maximale Resonanz bei der Resonanzfrequenz des freien Schwinkrieses $\omega_{\text{max}} = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Der dimensionslose Qualitätsfaktor $\mathcal{Q} = \frac{L\omega_{\text{max}}}{R}$ ist der Kehrwert der FWHM der Leistungskurve ($\frac{1}{\mathcal{Q}}$). So lässt sich Radioempfang technisch umsetzen.

Allgemeine Stromkreise mit Wechselspannung $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$

Seriel $Z = \sum_j Z_j$

Parallel $Y = \sum_j Y_j$

Phase $\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}(I)}{\text{Re}(I)}\right) = \arctan \text{Im}(Y)\text{Re}(Y)$

Strom $I(t) = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$

Ohm'sches $V(t) = I(t)Z \quad \text{bzw.} \quad I(t) = V(t)Y$

Bemerkung RL und RC sind typische Beispiele, die mit obigen Vorlagen einfach gelöst werden können.

mittlere Leistung $\langle P\rangle = \langle VI\rangle = \frac{1}{2}V_0 I_0 \cos\varphi$ Für reine R-Kreise $\langle P\rangle = \frac{1}{2}V_0 I_0 = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$

Effektivwerte $V_{\text{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ Für den Strom gilt analog $I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

Transformator Zwei Stromkreise mit eng umeinander gewickelten Spulen. Für die Ströme gilt $\frac{I_1}{I_2} \approx \pm\frac{N_2}{N_1}$. Wegen $P_{\text{loss}} = I^2 R_L = \frac{P^2}{V^2} R_L$ ist die Verlustleistung bei Hochspannung und kleinem Strom am kleinsten.

Mikroskopisch $\vec{E} = \rho\vec{J}$ mit spezifischer Leitfähigkeit $\sigma = \rho^{-1}$

Widerstand $\mathrm{d}R = \frac{\rho(x)}{A(x)}\mathrm{d}x$ es folgt $R = \int_0^\ell \mathrm{d}R$

8 Maxwellgleichungen und EM-Wellen

1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Gauss'sches Gesetz - Ladungen sind Quellen von E-Feldern
2. $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ es existieren keine magnetischen Monopole
3. $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ Faraday'sches Gesetz - sich ändernde B-Felder induzieren ein rotierendes E-Feld
4. $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ Ampèr'sches Gesetz - Stöme und Verschiebungsströme erzeugen rotierende B-Felder.

Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ Ladungserhaltung, keine Maxwellgeichung

Verschiebungsstrom $\vec{J}_v = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ kein physischer Strom. z.B. bei Kondesatoren $\text{Am}^{-2} = \text{Cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

Gauss Integral $\int_A \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{innen}}{\varepsilon_0}$

B-Mono Integral $\int_A \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = 0$

Faraday Integral $\oint_C \vec{E}\mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{B}\mathrm{d}\vec{A}$

Ampère Integral $\oint_C \vec{B}\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{E}\mathrm{d}\vec{A}$

EM-Wellen	Unter Betrachtung der Maxwellgleichungen im Vakuum ($\rho = 0, \vec{J} = 0$) und $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$ angewendet auf eines der Felder, folgt, dass die Lichtgeschwindigkeit $c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{E_0}{B_0}$ ist.		
Winkel	$\vec{E} = \vec{B} \times \hat{k}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}$	mit $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$, wobei $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{k}$ in Ausbreitungsrichtung zeigt.	
Poynting-Fluss	$S = \frac{1}{\mu_0}\langle \vec{E}\vec{B}\rangle$	Energietransport pro Flächeneinheit entlang $\vec{k}$	$\mathrm{Wm}^{-2} = \mathrm{kgs}^{-3}$
Poynting-Vektor	$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$	Betrag ist Poynting Fluss und Intensität der EM-Welle	
Poynting-Theorem	$\frac{\partial u_{\mathrm{mech}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -u_{\mathrm{mech}}$	Energieerhaltung mit $u_{\mathrm{mech}} = \vec{E}\vec{J}(= 0$ im Vakuum$)$, $u_{\mathrm{em}} = u_B + u_E$	
ϕ-Welle	$\Delta\phi - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	mit D'Alembert $\Box\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	
$\vec{A}$-Welle	$\Delta\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}$	mit D'Alembert $\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$	
Retardierte Potentiale	$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{J(\vec{r'}, t - \vert\vec{r} - \vec{r'}\vert/c)}{\vert\vec{r'} - \vec{r}\vert}\mathrm{d}V$		
Hertz'scher Dipol	Wir Komprimieren ein RLC-Stromkreis zu einem einzige Stab, der als RLC-Stromkreis fungiert. Es fliesse ein Strom $I(t) = I_0\cos(\omega t) = \omega Q_0\cos(\omega t)$. Dann ist $E_\theta = -\frac{\omega^2 Q_0 \ell \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin(\omega(t - r/c))$ und $B_\varphi = -\frac{\omega^2 Q_0 \ell \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\sin(\omega(t - r/c))$ mit Energietransport durch Kugelschale A sei $P = \frac{1}{\mu_0}\int_A(\vec{E} \times \vec{B})\mathrm{d}\vec{A}$		

9 Felder in Materie

Dielektrika	$C = \varepsilon C_{\mathrm{Vak}}$	für Kondesatoren mit Dielektirtätskonstante $\varepsilon \geq 1$	
E-Dipolmoment	$\vec{p} = q\vec{\ell}$	Wobei der Vektor ℓ von $-q$ zu $+q$ zeigt	$\mathrm{C\,m}$
E-Drehmoment	$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_{\mathrm{ext}}$		$\mathrm{J} = \mathrm{m}^2\mathrm{kgs}^{-2}$
B-Dipolmoment	$\vec{\mu} = NI\vec{A}$	dabei ist $\vec{A}$ die Fläche der Leiterschleife	$\mathrm{m}^2\mathrm{A} = \mathrm{m}^2\mathrm{Cs}^{-1}$
B-Drehmoment	$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$		$\mathrm{J} = \mathrm{m}^2\mathrm{kgs}^{-2}$
Dipol E-Feld	$\vec{E}_P = -\frac{N\vec{p}}{\varepsilon_0}$	Komponente im polarisierbaren Material mit $Np = P = \sigma$	
Ladungsdichte	$\rho_f = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$	und $\rho_g = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$	
Dielektrische Verschiebung	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$	Per definition $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$	Cm^{-2}

10 Physik I - Essentials

Rotationsbewegungen	
Trägheitsmoment	$J_A = \int r_\perp^2 \mathrm{d}m$
Steinersatz	$J_A = J_{A'} + md^2$
Drehimpuls	$\vec{L} = J_A\vec{\omega} = m\vec{r} \times \vec{v}$
Drehmoment	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J_A\vec{\alpha}$
Arbeit	$W = \int \vec{M}\mathrm{d}\varphi$
Kinetische Rotationsenergie	$T = \frac{1}{2}J_A\vec{\omega}^2$
Leistung	$P = \vec{M}\vec{\omega}$

11 Mathematik

1. Koordinatensysteme inklusive Vektoranalysis

Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

$$(x,y,z) = (\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z), \quad 0\le\rho<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi,\ -\infty<z<\infty$$

Flächenelement auf $\rho = \text{const}$: $d\vec{A} = \rho\, d\varphi\, dz$; Volumenelement: $dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,\mathbf{e}_z$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\Big)\mathbf{e}_\rho + \Big(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\Big)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\Big)\mathbf{e}_z$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\Big) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

$$(x,y,z) = \big(r\sin\vartheta\cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi,\ r\cos\vartheta\big), \quad 0\le r<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi,\ 0\le\vartheta\le\pi$$

Flächenelement auf $r = \text{const}$: $d\vec{A} = r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$; Volumenelement: $dV = r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$.

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\,\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\vartheta\, A_\vartheta) - \frac{\partial A_\varphi}{\partial\vartheta}\Big)\mathbf{e}_r + \Big(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\Big)\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\Big)\mathbf{e}_\varphi$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\sin\vartheta\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

2. Kreuzprodukt (Vektorschreibweise)

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a}).$$

3. Trigonometrie (inkl. Additionstheoreme)

Gerade/Ungerade: $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\tan(-x) = -\tan x$.
Phasenverschiebung: $\sin\big(x + \frac{\pi}{2}\big) = \cos x$, $\cos\big(x + \frac{\pi}{2}\big) = -\sin x$.
Addition/Subtraktion:

$$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y, \qquad \cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y.$$

Produktformeln (Beispiele):

$$\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x,$$
$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 y - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 y.$$

Summe-zu-Produkt:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Produkt-zu-Summe:

$\sin x\,\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$, $\cos x\,\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$, $\sin x\,\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$.

4. Integraltabelle

Ableitung $f'(x)$	**Funktion** $f(x)$	**Stammfunktion** $F(x) = \int f(x)\,dx$
$n\,x^{n-1}$ $(n \neq 0)$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{3/2}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x(\ln\lvert x\rvert - 1)$
$a\,e^{ax}$	e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$a^x \ln a$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$
$\frac{a}{ax+b}$	$\ln\lvert ax+b\rvert$	$\frac{(ax+b)\ln\lvert ax+b\rvert - (ax+b)}{a}$
$\frac{a}{a^2+x^2}$	$\arctan\frac{x}{a}$	$x\ \arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln\left(a^2+x^2\right)$
$e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)$	$e^{ax}\cos bx$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx + b\sin bx\right)$
$e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$	$e^{ax}\sin bx$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\cos bx - a\sin bx\right)$
$ae^{ax}x + e^{ax}$	$x\,e^{ax}$	$e^{ax}\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)$
$a\sin(2ax)$	$\sin^2(ax)$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$
$-a\sin(2ax)$	$\cos^2(ax)$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
—	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
—	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
—	$\frac{1}{ax^2+bx+c}$	$\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)$
—	$\frac{x^2}{x^2+1}$	$x - \arctan x$
—	$\frac{1}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right)$
—	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$
—	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$
—	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$
—	$\sqrt{x^2 \pm a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2}\ \pm\ \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$
—	$\frac{x}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right)$
—	$\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\sqrt{x^2 \pm a^2}$
$2x$	x^2	$\frac{x^3}{3}$
$3x^2$	x^3	$\frac{x^4}{4}$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta\vec{V}$$