Wellen, Wellengleichungen / allgemeine Lösung, Harmonisch

18.2.25

Eine Welle ist eine Form des Energietransports ohne Massentransport. Dabei schwingt jede Masse um ihre Ruhelage, bleibt dabei aber in Ruhe, bis sie von Welleberg "aktiviert" wird.

Annahme: keine Dispersion (Wellenform bleibt erhalten)

Allgemeine Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

Allgemeine Lösung:

$$\xi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

Harmonische Wellen:

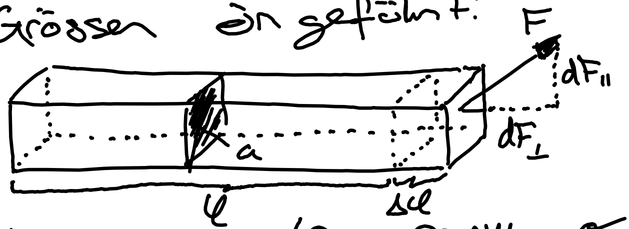
$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin[k(x \pm vt)] = \xi_0 \sin[kx \pm \omega t]$$

wobei $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenzahl genannt wird.

Elastizität von Festkörpern - Longitudinalwellen

20. 2. 25

Es werden im Folgenden einige neue Grössen eingeführt:



Normalspannung / Zugspannung $\sigma = \frac{dF_{\perp}}{da}$

Relative Verlängerung $\varepsilon_{\ell} = \frac{\Delta\ell}{\ell} \ll 1$

Elastizitätsmodul (Hookesches-Gesetz) $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\ell}} = \frac{\sigma\ell}{\Delta\ell}$

Man kann zeigen, dass die Ausbreitungsgeschwind. für Longitudinalwellen in Festkörpern gegeben ist durch

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

, wobei ρ die Massendichte ist.

Insbesondere ist das also auch die Schallgeschwindigkeit in Festkörpern.

Wellen in 3D, Kugelwellen, Energiedichte 20.2.25

Wir führen den sogenannten Laplaceoperator ein.

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Die Wellengleichung in 3-Dimension ist geg. als:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2}(x,y,z,t) - \Delta \vec{\xi}(x,y,z,t) = 0$$

Für die Lösung der Wellengleichung in 3D mit Verwendung von Kugelkoordinaten und der Tatsache, dass sich die Welle radial ausbreitet und somit gilt $\vec{k}\cdot\vec{r} = kr$ erhalten wir

$$\vec{\xi}(\vec{r},t) = \frac{\vec{A}_1}{r} f_1(kr-\omega t) + \frac{\vec{A}_2}{r} f_2(kr+\omega t)$$

wobei wir insbesondere bemerken, dass die Amplitude mit $1/r$ geht.

Weiter betrachten wir die gesamte Energiedichte als Summe der kinetischen Energiedichte $\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2}\rho v^2 f'^2$ und der elastischen Energiedichte (Spannenergie) $\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} E f'^2$

mit $v^2 = \frac{E}{\rho}$ erhalten wir also

$$\frac{dT}{dV} = \frac{dE_{el}}{dV} \quad \text{und} \quad \frac{dW}{dV} = \frac{dT + dE_{el}}{dV} = \rho v^2 f'^2$$

Wir sehen also, dass die Energiedichte aufgrund des f'^2 Terms mit $1/r^2$ geht.

Energieflussdichte, Intensität, Energiestrom

25.2.25

Die Energiedichte $\frac{dW}{dV}$ ist die Energie pro Volumen. Dann ist die mittlere Energiedichte während einer Periode

$$\left\langle \frac{dW}{dV} \right\rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dV} dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

Sie wächst also quadratisch mit Frequenz und Amplitude. Die Energieflussdichte $\vec{S}$, auch als Poynting-Vektor bekannt, ist die Energie d^2W die in der Zeit dt durch eine zur Energieflussdichte orthogonale Fläche $d\vec{a}$ geht.

$$\vec{S} = \frac{d^2W}{da\,dt} \frac{d\vec{a}}{|d\vec{a}|}$$

Die Intensität ist dann

$$I = |\vec{S}|$$

Der Energiestrom ist die während dt durch eine endliche Fläche A strömende Energie

$$\frac{dW}{dt} = \dot{W} = \iint_A \vec{S} \cdot d\vec{a}$$

Die mittlere Intensität der harmonischen Welle ist

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v = \frac{1}{2} \rho \frac{\omega^3}{k} A^2$$

Bei einer Kugelwelle im Abstand r: $A = \frac{A_0}{r}$

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \frac{A_0^2}{r^2} v \, 4\pi r^2 = 2\pi \rho \omega^2 A_0^2 v.$$

Stehende Wellen: Grenzübergang, Energie, 27.2.25
Eigenschwingungen: beidseitig eingespannt, einseitig.

Wir betrachten im folgen die Transmittierte und Reflexierten Welle, aufgrund einer ursprünglichen Welle.

$$\xi_A = A\cos(k_1 x - \omega t)$$
$$\xi_R = R\cos(-k_1 x - \omega t + \delta_R)$$
$$\xi_T = T\cos(k_2 x - \omega t + \delta_T)$$

Dabei gelten insbesondere Kräftegleichgewicht Seilwelle & Stetigkeit beim Grenzübergang. Daraus folgt allgemein.
$\delta_T = 0$, d.h. Die Transmittierte Welle ist in Phase.

$$\alpha := \frac{k_2 S_2}{k_1 S_1} = \sqrt{\frac{S_2\rho_2}{S_1\rho_1}}$$ Beschreibt 'Schnelligkeit' des Mediums. Umso grösser α umso härter das zweite Medium.

Es gilt
$\alpha = 1$, $R = 0$, $T = A$
$\alpha > 1$, $R \geq 0$, $\delta_R = \pi$, $R = \frac{\alpha - 1}{1+\alpha}A$, $T = \frac{2A}{\alpha+1}$
$\alpha < 1$, $R \geq 0$, $\delta_R = 0$, $R = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}A$, $T = \frac{2A}{\alpha+1}$

Am harten Medium gilt $\delta_R = \pi$, am weichen $\delta_R = 0$

E.kin: $\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = 2\rho A^2\omega^2 \sin^2(kx)\cos^2(\omega t)$

El.Energie: $\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = 2EA^2k^2\cos^2(kx)\sin^2(\omega t)$, $E = v^2\rho$

Die Eigenschwingung eines fest eingespannten Seil
$k_n = \frac{n\pi}{\ell}$, $\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{\ell}\sqrt{\frac{S}{\rho}}$ mit Grundfrequenz $\omega_1 = \frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{S}{\rho}}$

Einseitig eingespannte Seite (andere Seite ist frei)
$k_n = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\ell}$, $\omega_n = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{S}{\rho}}$ → nicht proportional ausser für sehr grosse n

Fourier-Transformation, Huygens, Beugung, Reflexion & Brechung, Fermat-sches Prinzip, Totalreflexion

4.3.25

- Die Fourier-Transformation erlaubt es uns beliebige periodische & stetige Fkt als Summe von cos und sin-Fkt zu approximieren.
- Huygens betrachtet Punkte als Quellen von Kugelwellen, wobei viele Effekte bewiesen werden können.
- Amplituden der überlagerten Kugelwellen mit $\Delta\varphi = k\sigma \sin\alpha$

$$\xi(\alpha) = \frac{a}{r} \frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)} e^{i(kr-\omega t)} \quad \text{, mit}$$

$$\langle I \rangle \sim \frac{a^2}{r^2} \frac{\sin^2(N\Delta\varphi/2)}{\sin^2(\Delta\varphi/2)}$$

- Für $N \to \infty$, $\sigma \to 0$ und $N\sigma = d = \text{konst}$ betrachten wir den Einzelspalt und erhalten

$$\langle I \rangle \sim A^2 \frac{\sin^2(\Delta\varphi/2)}{(\frac{1}{2}\Delta\varphi)^2}$$

Für $d \ll \lambda$ betrachten wir Kugelwelle,
$d \sim \lambda$ haben wir Beugung
$d \gg \lambda$ geometrische Optik $\to$ Ebene Welle.

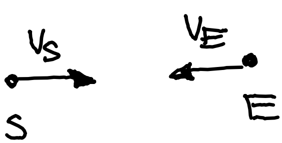
- Nach Snell gilt $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $f = \text{konst}$.
- Das Fermatsche-Prinzip besagt, dass Licht den <u>schnellsten</u> Weg wählt "Anschaulich: Schwimmbad"
- Brechungsindex $n_i = \frac{c}{c_i} > 1$, wobei i das Medium betrifft.
- Totalreflexion bei $\sin\alpha_2 = \frac{c_2}{c_1}\sin\alpha_1 > 1 \leadsto$ Glasfaser-Kabel

Gruppengeschwindigkeit, Dopplereffekt 9.3.25

- Die Phasengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit mit der sich ein Punkt konstanter Phase ausbreitet.
- Die Gruppengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit mit der sich das Wellenpaket und somit auch die Information bewegt. $v_g \le c$: Lichtgeschwindigkeit
- Der Dopplereffekt behandelt die wahrgenommenen Frequenzen von ausgesendeten Wellen bei endlicher relativer Geschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger.

$$f' = \frac{v + v_E}{v - v_S} f$$

v_E Geschw. vom Empfänger
v_S Geschw. vom Sender
f : Frequenz vom Sender
f' : wahrgenommene Frequenz Empfänger
v : Wellengeschwindigkeit



Coulomb-Kraft, Energie in Ladungsverteilungen, E-Feld, Gaussches Gesetz, Felder Einfacher Ladungen 17.3.25

Die Coulomb-Kraft ist geg. als

$$\vec{F}_{21} = k_C \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} \quad \text{mit } k_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Für mehrere Ladungen gilt Superposition.

Die Energie einer Ladungsverteilung erhalten wir durch Integrieren

$$W = \int_{\infty}^{r_{21}} -\vec{F}_{21}(\vec{r})\, d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}}$$

Für mehrere Ladungen gilt

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_j \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ji}}$$

Das E-Feld ist gegeben als

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \quad \text{, z.B. } \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Das Gausssche-Gesetz besagt, dass der Fluss

$$\Phi = \int_{\partial V} d\Phi = \int_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{a}$$

gegeben ist als die Gesamte Ladung innerhalb des Volumens durch ε_0

$$\phi = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0} = \int_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{a} = \int_{\partial V} \rho(\vec{r})\, dV$$

Einige Felder einfacher Ladungsverteilungen.

1) hom. gel. Kugeloberfläche $E(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q/r^2 & r > R \end{cases}$

2) unendlicher gel. Draht $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

3) unendliche hom. gel. Oberfläche $E(r) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

4) hom. gel. Kreis $E(r) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Energie des E-Feldes, Elektrisches Potential, mehrere Ladungen/Ladungsverteilungen, ~~Satz von Gauss, Satz von~~ Stokes 14.3.25

- Die Energiedichte des Elektrischen Feldes ist gleich dem Druck, Das folgt aus $\int dW = \int F dr = \int p dV$.
Daher gilt
$$p = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \Rightarrow U = \int dW = \int_V \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dV$$
Die Energie einer Ladungsverteilung ist gleich der Nötige Arbeit um sie vom Unendlichen zur jetzigen Position zu bringen.
- Die Arbeit um eine Ladung von A nach B zu verschieben ist ~~ges~~ als $W_{AB} = -\int_A^B q\vec{E}d\vec{s}$
Daraus folgt $W_{AA} = \oint \vec{E}d\vec{s} = 0$
Die Potentialdiffrenz ist ~~ges~~. als $\phi_{BA} = -\int_A^B \vec{E}d\vec{s}$
entspricht also der Arbeit pro Ladung. Mit einheit Volt.
Es gilt $\phi_{BA} = \phi(B) - \phi(A)$ und der Nullpunkt des Potentials wird in der Regel as $\lim_{r\to\infty} \phi(r) = 0$ def.
- Es gilt $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, d.h. Äquipotentiallinien sind senkrecht auf den Feldlinien.
- Für mehr Ladungen gilt superposition
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$ für Ladungsverteilungen Integrales
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{r}'$$ die Gesamtenergie ist dann
$$W = \frac{1}{2} \int \phi(\vec{r}')\rho(\vec{r}') d\vec{r}'$$
- Bsp: Homogener Plattenkondensator
$$\phi_{BA} = -\int_A^B \vec{E}d\vec{s} = E\Delta z, \quad W_{BA} = q_0 E \Delta z$$
- Bsp: Punktladung (wir nennen $A=\infty, B=r_0$)
$$\phi_{BA} = \phi(B) - \phi(A) = \phi(r_0) = -\int_\infty^{r_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} dr$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Satz von Gauss, Satz von Stokes angewandt auf Elektrostatik 14.3.25

Sei $\vec{E}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Dann ist gegeben:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{a} = \vec{\nabla} \vec{E}(\vec{r})$$

Der E-Fluss ist bekanntlich gegeben als

$$\Phi = \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{a}$$

Dieses Volumstück lässt sich in beliebige kleine Volumina aufteilen und es ist klar, dass sich die Flüsse an den innen Grenzflächen jeweils kompensieren. d.h.

$$\Phi = \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{a} = \sum_i V_i \int_{\partial V_i} \frac{\vec{E} d\vec{a}}{V_i}$$

Mit $V_i \to 0$ erhält man den Satz von Gauss

$$\int_{\partial V} \vec{E} d\vec{a} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV$$

Wir wissen $\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \, dV \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Dies ist die erste Maxwellsche Gleichung.

Wir haben also gefunden $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

daraus folgt $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ~ Poisson Gleichung

Mit dem Satz von Stokes lässt sich ähnlich wie mit Gauss schreiben

$$\int_{\partial A} \vec{E} d\vec{s} = \int_A \operatorname{rot} \vec{E} \, d\vec{a}$$ daraus folgt die zweite (nur in elektrostatisch gültige) Maxwell Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \operatorname{rot}(\vec{E}) = 0$$

Leiter, Influenz, Faraday'scher Käfig 18.3.23

Ein elektrischer Leiter hat einen kleinen inneren Widerstand und eine grosse Leitfähigkeit. D.h. Ladungen sind beweglich im Leiter.
Das E-Feld im innern eines Leiters wird kompensiert, da ansonsten sich ansonsten die Ladungen bewegen würde.

$$E_{in} = 0 \overset{Gauss}{\Rightarrow} 0 = \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{a} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{Q(V)}{\varepsilon_0}$$

Daraus folgt $Q_{in} = 0$ im innern des Leiters.
$\Rightarrow$ Ladung ist auf Oberfläche.
Aus $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ folgt, dass Potential ϕ konst im innern des Leiters ist.
$\Rightarrow$ Oberfläche eines Leiters ist Äquipotentialfläche
$\Rightarrow$ E-Feld steht senkrecht auf Leiteroberfläche
Es gilt $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ und je grösser Krümmung, desto grösser σ. (Siehe Kugeln mit $R_1 < R_2$ $\varphi_1 = \varphi_2$)

- Influenz: Ladungen auf der Oberfläche eines Leiters verschieben sich im externen E-Feld.
- Faradayscher Käfig: Leiter, der dessen umschlossenes Volumen aufgrund der Influenz vom externem E-Feld abschottet.

Eindeutigkeitssatz, Spiegelladungen, Dipol, Plattenkondensator, Seriell / Parallel 20.3.23

- Der Eindeutigkeitssatz besagt, dass für eine gegeben Menge an RB eine Lösung existiert, diese auch eindeutig ist.
- Spiegelladungen machen gebrauch von Eindeutigkeitssatz, indem E-Felder von Leitern und Ladungen mithilfe von an dem Leiter gespiegelten Ladungen bestimmen.
- Der Dipol sind zwei gegengleiche Ladungen mit fixem Abstand.

Das Potential an einem Punkt (r, θ, φ) ist geg. als

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}\cos\theta$$

Das Dipolmoment ist gegeben als $p = q \cdot d$

- Kondensatoren speichern Ladung prop zu ϕ mit $Q = C\phi$, wobei wir C die Kapazität nennen.
- Für Plattenkondensatoren mit $\sqrt{A} \gg d$ gilt

$$C = \frac{A\varepsilon_0}{d}, \quad E_{in} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad E_{out} = 0$$

Um eine Ladung dQ auf den Kondensator zu bringen

$$dW = \int \vec{F} d\vec{s} = \int dQ \vec{E} d\vec{s} = V dQ$$

Da die Spannung ist abhängig von der Ladung:

$$dW = \phi dQ = \frac{Q}{C} dQ \Rightarrow W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{C}{V^2} = \frac{1}{2} QV$$

- Für Parallel geschaltete Kapazitäten gilt

$$C = \sum_i C_i, \quad \text{Für Seriell: } C = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{C_i}}$$

Stromdichte, Kontinuitätsgleichung, Ohm'sches Gesetz, Kirchhoff-Gesetze, Innenwiderstände, Entladen von Kap 2S. 3.2S

- Der Strom kann mit $n \hat{=}$ Anzahldichte geschrieben $I = \frac{dQ}{dt} = nA\bar{v}q = \vec{J}\vec{A} = JA\cos\theta$, $\vec{J} = nq\vec{\bar{v}}$ ist. Dabei ist $\bar{v}$ die Driftgeschwindigkeit, die in einem gängigen Kabel mit $I = 1A$ ca $|\bar{v}| \sim 6m/Tag$ ist.
- Der Strom über die Volumenoberfläche integriert ist Änderung der Ladung im Innern. Daraus folgt Kontinuität $I_{\partial V} = \int_{\partial V} \vec{J} d\vec{a} = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dV. \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$
- Das Ohm'sche Gesetz setzt Feld und Stromdichte ins Verhältnis $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, wobei $\sigma = \rho^{-1}$ die Leitfähigkeit und ρ der spezifische Widerstand ist. Makroskopisch betrachtet $I = \frac{1}{R}V$
$\Rightarrow R = \frac{V}{I} = \frac{\ell E}{JA} = \frac{\ell}{A}\rho$ oder allg. $R = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{dr}{A(r)}$
- Die Kirchhoffschen Gesetze behandeln Schaltkreise
  1) Ohm'sches Gesetz $V_i = R_i I_i$
  2) Keine Ladungsansammlung $\sum I_i = 0$
  3) Summe der Potentiale verschwindet $\sum V_i = 0$
- Für Widerstände gilt bekanntlich $R_{\parallel} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}}$ $R_E = \sum R_i$
- Bei Potentialveränderung geht Energie verloren. Diese ist gegeben als $W = QV \Rightarrow P = \dot{W} = \dot{Q}V = IV$ d.h. für Widerstände gilt $P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R}$
- Eine Spannungsquelle besitzt einen Innenwiderstand.
- Für die Entladung des Kondensators sehen Kirchhoffschen Gesetze $IR + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C} = 0$
Lösung der DGL: $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ $\tau := RC$
$\Rightarrow W = \frac{1}{2}CV_0^2$

Grundlagen SRT, Zeitdilitation, Lorentzkontraktion 303.2

- Gesetze der Mechanik gelten für alle Inertialsystem
- Naturgesetze gelten in allen Inertialsystem
- $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \text{konst}$ für alle Inertialsystem

Wir betrachten zwei Inertialsysteme K und K'. Dabei ist K' ruhend und K bewegt. Wenn sich K mit v bewegt gilt für gemessene Zeiten

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \ \beta = \frac{v}{c}$$

und der Zeitdilitation $\Delta t = \gamma \Delta t'$

Also gilt, dass je schneller sich ein System bewegt, desto langsamer vergeht die Zeit in diesem System.

Eine ähnliche Betrachtung führt zur Lorentzkontraktion $l' = l\gamma$

D.h. in einem ruhenden System sind sich schnell bewegende Körper länger als ruhende.

Kugelwellen, Addition von Geschwindigkeiten
Gleichzeitigkeit, Raumzeit-Intervall 1.4.25

- Wir können punktförmige Lichtquellen betrachten. Nach Galilei ist diese Welle im bewegten Bezugssystem nicht punktförmig.
Nach Einsteins SRT gilt jedoch
$$(\Delta r)^2 = (ct)^2 \Rightarrow (\Delta r')^2 = (ct')^2$$
- Wir betrachten die Addition von parallelen Geschwindigkeiten. Dafür sei K ruhend, K' bewege sich mit v relativ zu K und ein zu beobachtendes Objekt mit u in K.

Dann gilt
$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{u \cdot v}{c^2}} \Rightarrow u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' v}{c^2}}$$
Diese Formel ergibt für $u': (u \ll c) - (v \ll c) \Rightarrow u - v$
- Gleichzeitigkeit heißt $\Delta t = 0$
für bewegte System K' mit v gilt
$$\Delta t' = \frac{1}{c} \cdot 2 \beta \gamma \ell$$
D.h. der Zeitunterschied hängt von der Geschwindigkeit ab. Insbesondere das Vorzeichen.
- Wir bemerken, dass gilt $\Delta t \neq \Delta t'$, $\Delta r \neq \Delta r'$ d.h. Räumliche und zeitliche Entfernungen sind nicht System invariant. Definiere Raumzeitintervall
$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta r)^2 = \left(\begin{matrix}\text{zeitliche} \\ \text{Entfernung}\end{matrix}\right)^2 - \left(\begin{matrix}\text{Räumliche} \\ \text{Entfernung}\end{matrix}\right)^2 = \Delta s'$$
$\rightarrow$ Lorentz-invariant.

Lorentztransformation, Minkowski-D, Eigenzeit, 3.4.25
Masse $\hat{=}$ Energie, Vierergeschwindigkeit, Impuls & Energie

---

Die Lorentztransformation ist Matrix $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ s.d.

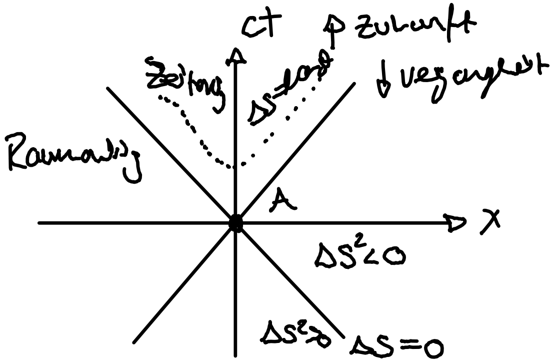
$$x'^{\mu} = \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(t - \frac{v}{c^2} z) \\ x \\ y \\ \gamma(z - vt) \end{pmatrix}$$

Wir definieren Skalarprodukt bzw Norm

$$\Delta s^2 = \Delta x^{\mu} \Delta x_{\mu} = \Delta x^{\mu} g_{\mu\nu} \Delta x^{\nu} = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

wobei $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Das führt uns zum Minkowski-Diagramm



Wir betrachten Ereignis A in Raum Zeit, wobei A nur mit zeitartigen interagieren kann.
$\Rightarrow$ Du kannst nur in Vergangenheit sehen.

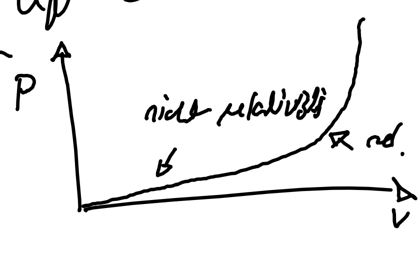
Wir sehen, dass die Ruheenergie geg. ist als $E_0 = mc^2$, d.h. die Energie ist äquiv. zur Masse

Für die Vierergeschwindigkeit gilt

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = c\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}, \text{ wobei } u^{\mu} u_{\mu} = c^2 > 0$$

Der Impulsvektor ist gegeben

$$p^{\mu} = m u^{\mu} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\vec{v}\gamma \end{pmatrix}$$



Magnetische Kraft, Amperes Gesetz, Ladungsinvarianz (SRT), Felder bewegter Ladungen, beschleunigter 9.4.25

- Die Lorenz-Kraft ist gegeben $\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ wobei $\vec{B}$ das Magnetfeld ist, dass durch Ströme nach Amperes Gesetz erzeugt $\mu_0 I = \oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{s}$
- Für bewegte Ladungen gilt, dass sie Lorenzinvariant sind. D.h. $Q = Q'$ (relativistisch)
- Für bewegte Ladungen $|v_x| > 0$ sind E Felder geg

$$E_x' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma x'}{\sqrt{(\gamma x')^2 + z'^2}} \quad E_z' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma z'}{\sqrt{(\gamma x')^2 + z'^2}}$$

D.h. es gilt $\frac{E_x'}{E_z'} = \frac{x'}{z'}$ d.h. $\vec{E}$ ist radial.

Dabei gilt aber

$$|E'| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r'^2} \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2\theta'}}$$

D.h. Feld wird in Bewegungsrichtung gestaucht und dichter (Ball $\to$ Ellipsoid) $\Rightarrow \vec{\nabla}' \times \vec{E}' \neq 0$

- Das hat zur Folge, dass für rasch beschleunigte bzw gebremste Ladungen Felder sogenannte Störfelder aufweisen. Das folgt aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Feldinformation mit (endlicher) Lichtgeschwindigkeit.
  ↳ wird gebraucht für Röntgenstrahlung

Energie eines EMP, Kräfte, Magnetische Kraft, Lorenzinvariant vs nicht, 26.4.25

- Eine beschleunigte Ladung hat einen Energie-enthaltenden EMP zur Folge. Dieser hat die Energie $U_{E\Theta} = \frac{q^2 a^2 \tau}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$, wobei das Magnetfeld nochmal die gleiche Energie transportiert und somit die Larmor-Formel geg ist als $P = 2U_{E\Theta}$
- Für Beobachter in einem System ist die Kraft von $\vec{E}$ auf q unabhängig von der Geschwindigkeit von q.

  $F_\parallel = qE_\parallel$, $F_\perp = \cancel{\gamma}\frac{1}{\cancel{\gamma}} qE_\perp = qE_\perp$
- Wenn wir Wechselwirkungen zwischen bewegten Ladungen betrachten sehen wir einen zusätzlichen Effekt welchen wir als Magnetische Kraft definieren. D.h. Magnetische Kraft ist direkte Folge aus der Relativitätstheorie. Die Magnetische Kraft ist senkrecht & proportional zu $\vec{v}$
- Ladung und Masse sind Lorenzinvariant
  & Trägheit
- Ladungsdichten jeder Art sind nicht Lorenzinvariant

Energie (kinetisch + Ruhe), Photon, Kraft & Trägheit, Dopplereffekt des Lichts, 26.4.25

- Die relativistische Gesamtenergie ist gegeben als

$$E = m\gamma c^2 = E_0 + E_{kin}$$

Dabei ist E_0 die Ruheenergie $E_0 = mc^2$ und $E_{kin} = (\gamma - 1)mc^2$

Ausserdem

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$$

- Für das Photon ($m = 0$) gilt dementsprechend

$$E_\gamma = p_\gamma c = hf \iff p_\gamma = \frac{hf}{c}$$

- Im folgend betrachten wir Kräfte und Trägheit unter dem Wissen $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

Wir sehen durch mühsames Rechnen:

$$\vec{F} = m\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)\gamma^3\vec{v} + m\gamma\vec{a}$$, daraus folgt

$$\vec{F}_{\parallel} = \frac{1}{v^2}(\vec{F}\cdot\vec{v})\cdot\vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \frac{1}{v^2}(\vec{F}\cdot\vec{v})\cdot\vec{v}$$

Daraus können wir schliessen:

1) $\vec{F}$ ist allgemein nicht parallel zu $\vec{a}$ $\Rightarrow$ Trägheit muss umgedacht werden
2) Falls $\vec{F} \perp \vec{v}$ gilt $\vec{F} = m\gamma\vec{a}$
3) Falls $\vec{F} \parallel \vec{v}$ gilt $\vec{F} = m\gamma^3\vec{a}$

- Für den Dopplereffekt des Lichts gilt (wir beobachten im gestrichenen System)

$$\frac{f}{f'} = \frac{1}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}$$, wobei v die Geschw. von K in K' ist.

θ: Winkel zur Geschwindigkeit (vom Beobachter)

Magnetfelder auf unendlich langen Draht, Amperesches Gesetz, kein Strom, Eindeutigkeitssatz, Potentialfeld, Biot-Savart'sches Gesetz, Punktladungen, unendliche Spule

26.4.25

Die Lorenzkraft ist $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, d.h. auf ruhenden Ladungen wirkt im Magnetfeld keine Kraft. Für den unendlichen stromdurchflossenen Leiter gilt $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$, wobei $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ die magnetische Permeabilität im Vakuum ist.

Das Amperesche Gesetz besagt $\oint_{\partial A} \vec{B} \, d\vec{s} = I_{enc} \mu_0$

Daraus folgt, dass ohne Strom gilt $\oint \vec{B} \, d\vec{s} = 0$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{J} \, d\vec{a} = \int_A \text{rot} \, \vec{B} \, d\vec{a} \Rightarrow \text{rot} \, \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Der Eindeutigkeitssatz besagt, dass wenn für eine gegebene Konfiguration von Strömen ein Magnetfeld existiert dieses auch eindeutig ist.

Wir definieren Potentialfeld $\vec{B} =: \nabla \times \vec{A}$

Wir suchen einen Weg von $\vec{J} \to \vec{A} \to \vec{B}$ zu erhalten

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, d\vec{r}\,'$$

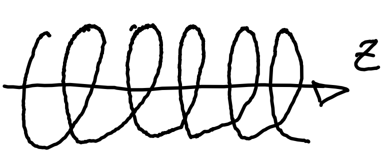
Daraus folgt das Biot-Savartsche Gesetz

$$d\vec{B} = \nabla \times d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} (d\vec{l} \times \hat{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (\vec{J} \times \hat{r}) \, dV$$

Für explizite B-Felder müssen wir noch integrieren

z.B Punktladung: $\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} (\vec{v} \times \hat{r})$

unendliche Schleife: $B_z = \mu_0 n I$



dabei ist n die Anzahl Windungen pro Länge

Unstetigkeiten in el und mg Feldern, Energiedichte des B-Feldes, Hall-Effekt, Relativistische Transformation von E und B-Feld

29.4.25

- Wir haben bereits gesehen, dass Oberflächenladungen Diskontinuitäten im E-Feld induzieren.
  Dabei gilt $(\vec{E}^+ - \vec{E}^-)\vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$
  Der Druck ist dann geg. durch $p = \frac{\sigma}{2}(E^+ + E^-)$

- Für das Magnetfeld wird eine Diskontinuität von einer stromführenden Schicht induziert.
  D.h. Eine geladene Ebene (σ) die sich bewegt ($\vec{v}$)
  $(\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = \mu_0 (\sigma \vec{v} \times \vec{n})$
  Der Druck ist dann geg durch $p = \frac{\sigma v}{2}(B^+ + B^-)$

- Die Energiedichte des B-Feldes ist geg als $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$ zur Erinnerung $u_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

- Der Hall-Effekt wird gebraucht um Vorzeichen der Ladung von Ladungsträger in Strom mithilfe von externen B-Feldern und Voltmeter zu bestimmen.

- Für relativistischen Transformation gilt

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \qquad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + c\vec{\beta} \times \vec{B}_{\perp})$$
$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \tfrac{1}{c}\vec{\beta} \times \vec{E}_{\perp})$$

D.h. Für alle Systeme welche sich mit $\vec{v} = c\vec{\beta}$ relativ zu einem System bewegen in dem $\vec{B} = 0$ gilt $\vec{B}' = -\gamma \frac{\vec{\beta}}{c} \times \vec{E}_{\perp}$

↳ bemerke, dass diese Effekte auch für nicht relativistische v relevant sind.

~~Induktion~~, Leiter als Teil eines Schaltkreises, magnetischer Fluss, dritte Maxwell, Lenzsches Gesetz, Selbst-, und gegenseitige Induktivität, Spule 6.5.25

- Wir betrachten einen bewegten Leiter $\vec{v}$ im Schaltkreis mit R und homogenem Magnetfeld $\vec{B}$. Durch die Bewegung wirkt eine magnetische Kraft auf Ladungen im Leiter, was ein internes E-Feld induziert, was eine Spannung induziert

$$\mathcal{E} = U_{ind} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B})\, d\vec{s}$$

Der magnetische Fluss ist definiert als

$\Phi(t) = \int_A \vec{B}\, d\vec{a}$ wir erhalten schlussendlich das Faradaysche Gesetz $\mathcal{E} = U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\, d\vec{a}$

und im Gleichgewicht die dritte Maxwellgleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$

D.h. sich zeitlich ändernde B-Felder erzeugen el. Wirbelfelder D.h. Induktionsspannungen

- Das Lenzsche-Gesetz besagt, dass magnetisch induzierte Spannungen ein Magnetfeld erzeugen, welches der Änderung des B-Felds entgegenwirkt.
- Die Gegeninduktivität zweier sich beeinflussender Geometrien sind gleich, unabhängig von den Geometrien und gegeben als $M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = M_{12}$
- Die Selbstinduktivität ist gegeben:

$\mathcal{E} = U_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$, wobei das Minus aus der Lenzschen Regel kommt.

- Für eine Spule gilt $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} \cdot I$

und die Selbstinduktivität: $L = \mu_0 \frac{AN^2}{\ell}$

RCL-Schwingkreis, Dämpfung, Wechselspannung, RL-Stromkreis, RC-Stromkreis, RLC Stromkreis 8.5.25

- Wir betrachten ein RCL Schwingkreis. D.h. wir erhalten DGL der Form $\frac{d^2V}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dV}{dt}+\frac{1}{LC}V=0$

Diese DGL lässt sich analog zu Schwingungen aus PI lösen

1) Schwache Dämpfung: $R^2<4\frac{L}{C}$ bzw $\rho^2<\omega_0^2$

$V(t)=V_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t)$, $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\rho^2}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$

2) Starke Dämpfung: $\rho^2>\omega_0^2$ bzw $R^2>4\frac{L}{C}$

$V(t)=Ae^{-\beta_1 t}+Be^{-\beta_2 t}$, $\beta_{1,2}=\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}$, $A+B=V_0$

$\rho^2\gg\omega_0^2\Rightarrow V(t)=V_0e^{-\beta_2 t}$

3) kritische Dämpfung $\rho=\omega_0$ bzw $R^2=4\frac{L}{C}$

$V(t)=Ae^{-\frac{R}{2L}t}(1+Bt)$, A,B aus Anfangsproblem

- Ein Wechselstromgenerator lässt sich durch in Magnetfeld rotierenden Leiterschleifen realisieren. → Induktion.
- $V_R=-IR$, $V_C=\frac{Q}{C}$, $V_L=-L\frac{dI}{dt}$
- Wir betrachten wieder Stromkreise mit ex. Spannung $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0\cos(\omega t)$ Und versuchen für den Ansatz $I(t)=I_0\cos(\omega t+\alpha)$ ausdrücke für α und I_0 zu finden.

RL) $I_0=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$, $\alpha=\arctan\left(\frac{-\omega L}{R}\right)$

RC) $I_0=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}$, $\alpha=\arctan\left(\frac{1}{R\omega C}\right)$

RLC) falls $\omega L-\frac{1}{\omega C}>0$ betrachten wir ersatz-Induktivität L', andernfalls C'. Dann RC/RL.

$\omega L'=\omega L-\frac{1}{\omega C}$, $\frac{1}{\omega C'}=\frac{1}{\omega C}-\omega L$

in beiden Fällen gilt $I_0=\mathcal{E}_0\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

- Der Strom ist Maximal bei $\omega_{max}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

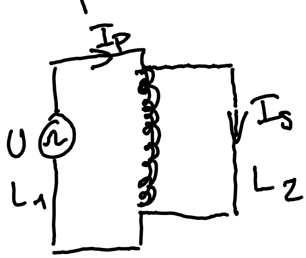
Impedanz, Admittanz, Phase, Serie/Parallelschaltung, Leistung, Transformator 13.5.25

- Falls Strom/Spannung komplex als $I = I_0 e^{i(\omega t + \alpha)}$ beschrieben wird ist $\mathrm{Re}(I)$ der Messwert.
- Die Impedanz Z ist Analog zum Widerstand und die Admittanz $Y = \frac{1}{Z}$ analog zur Leitfähigkeit.

Komponente	Admittanz	Impedanz
R	$1/R$	R
L	$-i/\omega L$	$i\omega L$
C	$i\omega C$	$-i/\omega C$

- Die Phase ist jederzeit gegeben als $\alpha = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\,Y}{\mathrm{Re}\,Y}\right)$
- Es gelten Kirchhoffsche Regeln und für Serieschaltung gilt $Z = \sum Z_i$, für Parallelschaltung $Y = \sum Y_i$
- Für die Leistung wird oft der über eine Periode gemittelte Wert $\langle V \cdot I \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos\alpha = V_{eff} I_{eff} \cos\alpha$ betrachtet. Dabei $V_{eff} = \mathrm{RMS}(U) = V_0/\sqrt{2}$, $I_{eff} = I_0/\sqrt{2}$
- Der Energietransport mit Hochspannung effizienter ist als für Starkstrom d.h. wir transformieren mit Transformatoren: Starkstrom → Hochspannung → Starkstrom

Trafo:



Dabei gilt für zwei Induktionen mit N_1 und N_2 Windungen, gleiche Länge und Querschnittsfläche:

$$\frac{\hat{I}_p}{\hat{I}_s} \approx \pm \frac{N_2}{N_1} \approx \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_p}$$

(Primär → Sekundär)

Maxwell Gleichungen, (im Vakuum), rotrot, Lichtgeschwindigkeit, EM-wellen, Energie, Poynting, Lorentz-Transformation 15.5.25

- Zum auswendig lernen:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ – Ladungen sind Quelle von E-Feldern

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ – keine Magn. Monopole

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ – Änderungen im B-Feld induzieren E-Wirbelfelder

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ – Ströme und zeitlich ändernde E-Felder erzeugen B-Feld.

Zusätzlich gilt immer Ladungserhaltung $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

- Das Ampèresche-~~Gesetz~~ hat den neuen Term $\mu_0\varepsilon_0\,\partial\vec{E}/\partial t$. Dieser kommt von der Tatsache, dass z.B. beim entladen und laden eines Kondensators zwischen den Platten ein B-Feld entsteht, obwohl $\vec{J} = 0$
- Es gilt $\text{rot}\,\text{rot}(\ldots) = \text{grad}\,\text{div}(\ldots) - \Delta(\ldots)$
- Für E und B-Feld im Vakuum gilt

$\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$ und $\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$

D.h. wir haben Wellengeschwindigkeit = Lichtgesch.

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{E_0}{B_0}$$

- Allgemein gilt für EM-Wellen E-Feld $\perp$ B-Feld $\perp$ Richtung. Dabei muss die Welle nicht zwingend sinusförmig sein.
- Die Energieflussdichte / Poynting-Vektor einer EMW ist gegeben

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ und es gilt $\frac{\partial(u_{mech} + u_{em})}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{S} = 0$

D.h. Änderung der Energiedichte haben wir Energieflussdichte.

- $\vec{E}\cdot\vec{B}$ und $E^2 + c^2B^2$ sind Lorenz invariant.

d'Alembert Operator, Wellengleichung (Vek. Pot, el. Pot), retardierte Potentiale, Hertz'scher Dipol (im Fernfeld) 20.5.25

- Der d'Alembert Operator ist definiert

$$\Box(\ldots) = \Delta(\ldots) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\ldots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\ldots)$$

- Dann sind die Wellengleichungen der Vek/el. Pot:

$$\Box \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

- Die retardierten Potentiale beschreiben den effekt von sich bewegenden Ladungen bei $\vec{r}'$ am Punkt $\vec{r}$. Dabei wird die Kausalität nicht verletzt und Informationen breiten sich mit c aus.

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \, d\vec{r}'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \, d\vec{r}'$$

- Der Hertz'schen Dipol (Antenne) ist ein kompakter getriebener RLC-Schwingkreis. Dabei werden EMW ausgesendet. Es gilt

$$\omega = \frac{I_0}{Q_0}, \text{ wobei } I(t) = I_0 \cos\omega t, \; Q(t) = Q_0 \sin\omega t$$

- Das empfangen bzw senden von EMP ist am effizientesten bei $l = \frac{\lambda}{2}$ d.h. eine stehende Welle mit Bauch in der Mitte.

- Im Fernfeld gilt dann

$$E_r = 0, \; E_\varphi = 0, \; E_\theta = -\frac{\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\sin\theta}{r}\sin(\omega(t - r/c))$$

$$B_r = 0, \; B_\theta = 0, \; B_\varphi = -\frac{\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\sin\theta}{r}\sin(\omega(t - r/c))$$

Dielektrikum, Dipole im hom E-Feld, polarisierte Materie, Dielektrische Verschiebung, Maxwell in Materie 26.5.25

- Ein Dielektrikum ist ein polarisierbarer Isolator (nicht Leiter)
  Dabei gilt für einen Plattenkondensator mit Kap C_{vak} und dem eingeschobenen ~~Dielektrikum~~ Dielektrikum mit Konst ε: $C=\varepsilon C_{vak}$
  D.h. aus $Q=C\cdot U$ folgt $Q=\text{konst} \Rightarrow U=\frac{1}{\varepsilon}U_{vak}$
  $U=\text{konst} \Rightarrow Q=\varepsilon Q_{vak}$
- Ein E-Dipol hat Dipolmoment $\vec{p}=q\cdot\vec{\ell}$, wobei $\vec{\ell}$ von $q^- \to q^+$
  Bei ausgedehnter Ladungsverteilung gilt $\vec{p}=\int \rho\,\vec{r}\,dV$
- In einem hom E-Feld ist die Gesamtkraft auf E-Dipole Null. Jedoch ist das Drehmoment geg: $\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E}$
  Sei Θ der Winkel zwischen $\vec{E}$ und $\vec{\ell}$. Dann ist die Arbeit die verrichtet wird beim Ausrichten geg $W=pE(\cos\Theta_1-\cos\Theta_2)$
- Dipole können Formen von Molekülen haben z.B. H_2O welches sich im E-Feld ausrichtet.
- ~~Besteht~~ Besteht ein Material aus ausgerichteten Dipolen nennen wir es polarisiert. N ausgerichtete Dipole $\vec{P}=N\cdot\vec{p}$
  Bei geometrischer Betrachtung wird klar, dass sich innen Ladungen kompensieren und am Rand ist σ^+ bzw σ^-
  Dann gilt im Innern $\vec{E}=-\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}=-N\frac{\vec{p}}{\varepsilon_0}$
- Falls noch weitere E-Felder auftauchen sind diese additiv.
  z.B. Plattenkond: $E_{vak}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, $E_P=-\frac{P}{\varepsilon_0}$, $E_{res}=\frac{\sigma-P}{\varepsilon_0}$
  Es ist definiert $\varepsilon=\frac{E_{vak}}{E_{res}}=\frac{\sigma}{\sigma-P}=\frac{\sigma-P}{\sigma-P}+\frac{P}{\sigma-P}=1+\chi$
  wobei χ die Suszeptibilität ist.
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \to \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\vec{E}_{vak}=\frac{\rho_{frei}}{\varepsilon\varepsilon_0}$, Definiere $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$
  Dann gilt $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_{frei}$

Für die anderen Maxwell gleichungen gibt es andere Ersatzfelder die wir hier nicht genauer betrachten.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_{frei},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}_{frei}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Und Ladungserhaltung $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_{frei}=-\frac{\partial}{\partial t}\rho_{frei}$