23.2.25

Polynome, Polynomdivision, Nullstellen, Fundamentaler Satz der Algebra und algebraisch abgeschlossen

K sei ein Körper. Dann ist $K[x] = \{\text{Polynom mit Koeffizienten in } K\}$

z.B $f(x) \in K[x] \Rightarrow f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in K$

Der Grad von f: $\deg(f) = \max\{n \geq 0 \mid a_n \neq 0\}$

Beachte, dass $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$

und $\deg(0)$ nicht definiert ist.

Polynomdivision

Seien $f, g \in K[x]$, $g \neq 0$. Dann existieren Polynome $q(x), r(x)$ mit $r = 0$ oder $\deg(r) < \deg(g)$, s.d.

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

Nullstellen

Es sei $f(x) \in K[x]$ $f \neq 0$. Sei $\lambda \in K$ s.d. $f(\lambda) = 0$

Dann $\exists\, q(x) \in K[x]$ s.d:

$$f(x) = (x - \lambda)\, q(x)$$

Bemerke, dass f höchstens $\deg(f)$ Nullstellen hat.

Fundamentaler Satz der Algebra

Sei $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(f) = n > 0$, dann hat $f(x)$ in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen. d.h. $\exists\, \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$ s.d:

$$f(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$$

Die Körper, welche diese Eigenschaft haben, nennen wir algebraisch abgeschlossen.

Beachte: Analogie zwischen $\mathbb{Z} \longleftrightarrow K[x]$

Primzahl $\longleftrightarrow$ unzerlegbares Polynom, $\pm 1 \longleftrightarrow K \setminus \{0\}$

Eigenwerte & Eigenvektoren, charakterisierung mit kern und determinante

23.02.25

V/K endl. dim VR und $T: V \to V$ endomorphismus.

(1) $\lambda \in K$ ist Eigenwert (EW) von T, wenn
$\exists v \in V, v \neq 0_V$ s.d. $Tv = \lambda v$

(2) Ein solcher Vektor v heisst Eigenvektor (EV) mit EW λ. Achtung: $v \neq 0_V$

Bemerke, dass wenn v EV von T ist, auch αv mit $\alpha \in K \setminus \{0\}$ EV von T ist mit dem selben EW. $\leadsto$ folgt aus Eigenschaften lineare Abbildungen.

Sei $T: V \to V$ linear. Dann gilt
λ ist EW $\Leftrightarrow \ker(T - \lambda I_n) \neq \{0_V\} \Leftrightarrow \det(T - \lambda I_n) = 0$
insbesondere gilt dann, dass $T - \lambda I_n$ nicht injektiv und insbesondere nicht isomorph sein kann. Dementsprechend ist T nicht invertierbar, falls 0 ein EW ist.

Charakteristisches Polynom, Nullstellen, Char Poly für obere Dreiecksmatrix und $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, Spurabbildung, alternative formulierung von $\chi_T(x)$, Anzahl EW 23.2.25

- Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und $T: V \to V$ linear, $\mathcal{B}$ Basis von V. Dann ist das charakteristische Polynom geg als:
  $\chi_A(x) = \det(A - xI_n)$
  $\chi_T(x) = \det([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - xI_n)$
  Bemerke, dass $\chi_T(x)$ unabhängig von der Basis ist.
- $\{\text{Eigenwerte}\} = \{\lambda \in K \mid \chi_T(\lambda) = 0\}$ $\Rightarrow$ Eigenwerte sind die Nullstellen
- Für $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(K)$ einer oberen Dreiecksmatrix gilt $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - x)$
- Für Matrizen der Form $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ gilt
  $\chi_M(x) = \chi_A(x)\chi_C(x)$
- Die Spurabbildung ist folgendermassen definiert
  $Tr: M_{n\times n}(K) \to K$ mit $A = (a_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
  Bemerke, dass die Spurabbildungen auch für Abbildungen definiert ist und Basenunabhängig ist.
- Sei $T: V \to V$ linear, dann gilt
  $\chi_T(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} Tr(T) x^{n-1} + \dots + \det(T)$
- Aus obiger Notation erkennt man leicht, dass T maximal n EW haben kann.

lin. unab von EV, diagonalisierbarkeit, char poly diagonalisierbarer Matrix 23.2.25

Wir beschäftigen uns mit der Frage, ob für eine Matrix eine Basis gewählt werden kann, so dass diese Basis Diagonal ist.

- Seien $\lambda_1 \dots \lambda_m$ verschiedene EW von T. $\forall i$ sei v_i ein EV mit EW λ_i. Dann gilt: $v_1 \dots v_m$ sind lin. unab.
- Hat $T: V \to V$ mit V n-dim n verschiedenen EW, so hat T n linear unabhängige EV, welche eine Basis von V bilden.

Definition: Diagonalisierbarkeit

$T: V \to V$ ist diagonalisierbar, wenn eine Basis aus EV existiert. In diesem Fall ist die Abb-Matrix bezüglich dieser Basis diagonal.

- D.h. $A \in M_{n \times n}(K)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\exists B \in GL_n(K)$ s.d. $B^{-1}AB$ diagonal ist.
- Wenn A Diagonalisierbar mit EW $\lambda_1 \dots \lambda_n$, dann gilt $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - x)$

Eigenraum, direkte Summe, Summe von Eigenräumen
algebraisch/geometrische Vielfachheit. 26.2.25

- Sei $T: V \to V$ linear, λ EW von T. Der <u>Eigenraum</u> E_λ ist definiert als
  $E_\lambda = \ker(T - I_n\lambda) = \langle \{$zu λ gehörende EV$\} \rangle$
  Der Eigenraum ist immer ein Unterraum
- Der Ausdruck $W = U_1 + \dots + U_K$ ist die direkte Summe $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, wenn $\forall w \in W \; \exists! \, u_i \in U_i$ s.d. $w = u_1 + \dots + u_n$
  alternativ: $u_1 + \dots + u_n = 0_V \Rightarrow u_i = 0_V \; \forall i$.

  Wenn $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, dann gilt
  $\dim(W) = \sum_{i=1}^{n} \dim(U_i)$ und die Vereinigung der Basen von U_i ist eine Basis von W.
- Für Eigenräume gilt
  $W = E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_n} \Rightarrow W = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}$
  Und $T: V \to V$ ist genau dann diagonalisierbar, falls $W = V$
- λ sei EW von $T: V \to V$.
  (1) Geometrische Vielfachheit: $g(\lambda) = \dim(E_\lambda)$
  (2) Algebraische Vielfachheit: $a(\lambda) =$ Ordnung der Nullstelle in $\chi_T(\lambda)$
  Es gilt $g(\lambda) \leq a(\lambda)$, $\sum_{\lambda_i} a(\lambda_i) = \dim(V)$
  Und T ist genau dann diagonalisierbar, wenn
  $g(\lambda_i) = a(\lambda_i) \; \forall i$

Polynome von Endomorphismen, Existenz eines eind. 'Nullpolynoms', minimales Poly, Teiler von Nullpoly. 2.3.25

- Sei $g(x) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in K[X]$, dann gilt
  $g(T) = a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0 T^0 \in \mathrm{Endo}_K(V)$, mit
  $T^n = T \circ \dots \circ T$, n mal mit $T^0 := id_V$.

- Für $T \in \mathrm{Endo}_K(V)$ existiert $g(x) \in K[x]$ mit $g(x) \neq 0$ s.d. $g(T) = 0_V$
  Beweis über dimension von $\mathrm{Endo}_K(V)$ und linearkombi.

- $T \in \mathrm{Endo}_K(V)$. Das minimale Poly von T ist das monische Poly kleinsten grades, s.d.
  $m_T(x) \in K[x]$ s.d. $m_T(T) = 0_V$
  Bemer: dieses min. Poly existiert und ist eindeutig.

- Für $T \in \mathrm{Endo}_K(V)$, $g(x) \in K[x]$, $g(x) \neq 0$ s.d. $g(T) = 0_V$ gilt $m(x) \mid g(x)$.

lcm (kgV), min Poly von dia-Block, Caley-Hamilton

- Sei K alg. abgeschlossen, $f(x), g(x) \in K[x]$ 9.3.25

  $f(x) = (x-\lambda_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_n)^{a_n}$ $\lambda_i = \lambda_j \; \forall i \neq j$

  $g(x) = (x-\lambda_1)^{b_1} \ldots (x-\lambda_n)^{b_n}$ $a_i, b_i \geq 0 \; \forall i$

  Das kgV oder lcm ist geg als

  $\operatorname{lcm}(f,g) = (x-\lambda_1)^{\max(a_1,a_2)} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_n)^{\max(a_n,b_n)}$

- Das Minimale Polynom einer Matrix $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ mit A, B quadratische Matrizen ist geg als

  $m_C(x) = \operatorname{lcm}(m_A(x), m_B(x))$

  Daraus folgt offensichtlich dass $D = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$

  $m_D(x) = \operatorname{lcm}(m_{A_1}(x), \ldots, m_{A_k}(x))$

- Caley-Hamilton besagt, dass für $A \in M_{n \times n}(K)$

  $\chi_A(A) = 0_{n \times n}$

  Bzw $T: V \to V$

  $\chi_T(T) = 0_{K^n}$

  Dann gilt offensichtlich

  $m_A(x) \mid \chi_A(x)$

Jordanblock, Jordansche-Normalform, Eigenschaften 9.3.25

- Sei $\lambda \in K$ und $n \geq 1$. Dann ist der Jordanblock

  $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ } länge n

  Für den JB gilt

  $\chi_{J_n(\lambda)}(x) = (\lambda - x)^n$, $g_\lambda = 1$, $a_\lambda = n$, $m_{J_n}(x) = (-1)^n \chi_{J_n}(x)$

- Sei $T: V \to V$ linear.
  Dann existiert eine Basis B von V s.d.

  $$[T]^B_B = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_k}(\alpha_k) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \alpha_i \in K \\ n_i \geq 1, \; \sum n_i = \dim(V) \end{array}$$

  Diese darstellung ist abgesehen von der Vertauschung der Blöcke eindeutig.
  Für $A \in M_{n \times n}(K)$ $\exists B \in GL_n(K)$ s.d.
  $B^{-1}AB$ in Jordanscher-Normalenform ist.

- Eigenschaften

  $\chi_T(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)^{n_k}$

  $m_T(x) = (x - \alpha_1)^{n_1'} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)^{n_k'}$

  wobei n_i' der Maximale exponent aller JB mit gleichem α ist

  a_λ: Ablesen auf Diagonale

  g_λ: Anzahl JB zu EW λ

Verallgemeinerte Eigenräume, Jordankette, EV in JK, Eigenschaften des $\tilde{\hat{E}}_\lambda$, direkte Summe 12.03.25

- Der verallgemeinerte Eigenraum von EW λ von $T: V \to V$ mit $\dim V = n$ sei ggf als (und wir können begrenzen)
  $$\tilde{\hat{E}}_\lambda = \bigcup_{k \geq 1}^{\infty} \ker\left[(T - \lambda \mathbb{I}_V)^k\right] \Leftrightarrow \ker(T - \lambda \mathbb{I}_V)^n$$
- Sei $v \in \tilde{\hat{E}}_\lambda$, $v \neq 0_V$, sei $k \geq 1$ minimal s.d. $(T - \lambda \mathbb{I}_V)^k v = 0_V$
  Dann ist $\{v, (T - \lambda \mathbb{I}_V)v \dots (T - \lambda \mathbb{I}_V)^{k-1} v\}$ die Jordankette von v der Länge k.
  ↳ $(T - \lambda \mathbb{I}_V)^{k-1} v$ ist EV von T mit EW λ.
  ↳ Jeder EV von T bildet eine JK der Länge 1.
- $\tilde{\hat{E}}_\lambda$ ist T invariant, d.h. $T(\hat{E}_\lambda) \subseteq \tilde{E}_\lambda$
- λ ist einziger EW von $T|\tilde{\hat{E}}_\lambda$
- Sei $T' = T|\tilde{\hat{E}}_\lambda$, dann gilt $\chi_{T'}(x) = (\lambda - x)^{k_\lambda}$ mit $k_\lambda \leq a_\lambda(T)$
- Seien μ und λ verschiedene EW von T, dann gilt $\tilde{\hat{E}}_\lambda \cap \tilde{\hat{E}}_\mu = \{0_V\}$ und $\tilde{\hat{E}}_\lambda + \tilde{\hat{E}}_\mu = \tilde{\hat{E}}_\lambda \oplus \tilde{\hat{E}}_\mu$
- $T: V \to V$ sei linear. Dann gilt
  $$V = \bigoplus_{\lambda \text{ EW}} \tilde{\hat{E}}_\lambda$$

Normierte Räume, Euklidischen Räume, Einheitsvektoren,
inneres Produkt 19.3.25

- Ein normierter Raum ist ein Vektorraum ausgestattet mit einer Norm. zur wdhl.:

  $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

  1) $\|v\| = 0_V \iff v = 0_V$

  2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

  3) $\|v+u\| \leq \|v\| + \|u\|$

- Ein Einheitsvektor ist $v \in V$ s.d. $\|v\| = 1$
- Die Distanz zweier $v_1, v_2 \in V$ ist $\|v_1 - v_2\|$

  ↳ Norm induzierte Metrik

- Sei $v \in V$ $v \neq 0_V$, dann ist $\frac{v}{\|v\|}$ ein Einheitsvektor, genannt normalisierung von v.
- Das innere Produkt, (Skalarprodukt)

  $\langle \, , \, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

  1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in V$

  2) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in V$

  3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_V$

- $(V, \langle \, , \, \rangle)$ ist ein Euklidischer Raum.

IP auf $\mathbb{C}$ Räume, Eigenschaften IP auf EVR/HVR, Norm, Cauchy-Schwarz, Konstruktion IP 23.3.25

- Sei V $\mathbb{C}$-VR und IP eine Fkt $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$
  1) linear in erster Variable
     $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$
     $\langle \alpha v_1, w \rangle = \alpha \langle v_1, w \rangle$
  2) Sesquilinear in zweiter Variable
     $\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle$
     $\langle v, w\alpha \rangle = \overline{\alpha} \langle v, w \rangle$
  3) hermitischen Eigenschaft
     $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
  4) $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0_V\}$

  Dann ist $(V, \langle , \rangle)$ ein hermitischer oder unitärer Raum
- Sei V EVR/HVR. Dann gilt
  1) $\langle 0_V, v \rangle = \langle v, 0_V \rangle \quad \forall v \in V$
  2) $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow w = 0_V$
  3) $\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle \quad \forall v \in V \Rightarrow w_1 = w_2$
- Sei V EVR/HVR. Dann ist $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm.
- CS: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ mit Gleichheit bei linearer Abhängigkeit
- Sei $(V, \langle , \rangle)$ EVR. Dann gilt
  $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$ wobei $\|\cdot\|$ die ind. Norm ist.
- Def $(,)_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als $(v, u)_A = v^T A u$
  ↳ ist bilinear, nicht zwingend symmetrisch
- Sei $A = A^T$, dann gilt $(v, u)_A = (u, v)_A$
- $A = A^T$ ist positiv definit, falls
  $v^T A v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_V\}$

IP auf HVR konstruieren, adjungierte/hermitische Matrix, Orthogonalität, Orthonormalität, Projektion 26.3.25

- zu EVR
  Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dann ist $(\,,\,)_A$ pos def ein IP $\Leftrightarrow$ A pos. def.

Definiere für $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$

- $(\,,\,)_B : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ mit $(u,v)_B = u^T B v$
- Schreiben $\overline{B} = \overline{(b_{ij})}$ die adjungierte Matrix von B ist
  $B^* = \overline{B}^T$
- B ist hermitisch, falls $B = B^*$
- Wir nennen eine hermitische Matrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ pos. def, wenn
  $v^T B \overline{v} > 0 \quad \forall v \neq 0_V$

Sei $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ Dann gilt $(\,,\,)_B$ ist IP $\Leftrightarrow$
B hermitisch und pos. def.

Definieren für V IP-Raum

1) $v, w \in V$ sind orthogonal $(v \perp w) \Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0$
2) $S \in V$ ist orthogonales System, wenn $u \perp v$
   $\forall v, u \in S \quad u \neq v$
3) Ein orthogonales System S ist orthonormal,
   wenn $\|v\| = 1 \quad \forall v \in S$

Satz von Pythagoras: Sei V IP Raum mit $v \perp u$
Dann gilt $\|v+u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$

Definieren Projektion $v \neq 0_V$ in IP Raum V

$$\mathrm{proj}_v : V \to V \qquad u \mapsto \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

Bemerke $u \perp v \Leftrightarrow \mathrm{proj}_v(u) = 0$

Orthogonale Systeme (Eigenschaften), GSOV, Länge mit ON Basis, IP zu geg. Basis (ON) 30.3.25

- Sei $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ IP Raum. Wenn $S \subseteq V$ orthogonales System mit $0_V \notin S$ ist, dann sind alle Elemente in S linear unabhängig. Sei $\{v_1 \dots v_n\}$ Orthogonales System mit $v_i = 0_V$ und $v = \sum \alpha_i v_i$ dann gilt
  $\alpha_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$
- Orthogonales System in n-dim VR hat höchstens n Vektoren
- Sei $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ IP Raum. $n = \dim_K(V)$ und $v_1 \dots v_n$ Basis. Dann führt folgende Def von $w_1 \dots w_n \in V$ zu OrthoBasis
  1) $w_1 = v_1$
  2) $w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} proj_{w_j}(v_i)$
- Jeder IP Raum besitzt ON Basis $v_1 \dots v_n$. Dann gilt für $v = \sum \alpha_i v_i$ $\alpha_i = \langle v, v_i \rangle$, $\|v\|^2 = \sum \alpha_i^2$
- Falls wir eine Basis $v_1 \dots v_n$ haben, können wir IP $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ definieren, womit die Basis ON ist.

Orthogonales Komplement, orthogonale Projektion, orthogonale / Unitäre Matrizen 3.4.25

- Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ IP Raum mit $\emptyset \neq S \subseteq V$. Das orthogonale Komplement von S ist gegeben als
  $$S^\perp := \{v \in V \mid \langle v, s\rangle = 0 \ \forall s \in S\}$$
- Es gelten folgende Eigenschaften
  1) $\{0_V\}^\perp = V$
  2) $V^\perp = \{0_V\}$
  3) $(V^\perp)^\perp = V$
  4) $S^\perp \leq V$
  5) $S \cap S^\perp = \{0_V\}$ oder $\emptyset$
  6) $S \subseteq T \subseteq V \Rightarrow T^\perp \subseteq S^\perp$
  7) $\mathrm{span}(S)^\perp \subseteq S^\perp$
  8) $S \subseteq (S^\perp)^\perp$
- Für beliebig dimensionale IP Räume V und endl. dim UR U gilt $V = U \oplus U^\perp$
- D.h. wir können alle $v \in V$ eindeutig schreiben als $v = u + w$ mit $u \in U$, $w \in U^\perp$
  Dann definieren wir die orthogonale Projektion
  $$pr_U(v) = u$$
  Dann ist pr_U insbesondere linear und es gilt
  $$\ker(pr_U) = U^\perp, \quad \mathrm{im}(pr_U) = U$$
- Für UR gilt $U = (U^\perp)^\perp$
- $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist orthogonal, falls Spaltenvektoren ON Basis zu Standard IP bilden. $A \in O(n)$
- $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist unitär, falls Spaltenvektoren ON Basis zu Standard IP bilden $B \in U(n)$
- Es gilt $A \in O(n) \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$
  $$B \in U(n) \Leftrightarrow B^{-1} = B^* = \overline{B}^T$$

QR-Zerlegung von A ($rk(A) \neq n$), Darstellungssatz von Riesz
Annulator
S.4.25

- Bemerke, dass $O(n)/U(n)$ eine Untergruppe von GL ist.
- Sei $A \in GL_n(K)$ $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$. Dann existiert $Q \in O(n)/U(n)$ und $R \in GL_n(K)$, ODM s.d.
  $A = QR$
  Dabei gilt für $A = (v_1 \dots v_n)$, $Q = (w_1 \dots w_n)$

$$R = \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & \langle v_2 w_1 \rangle & & \vdots \\ & \langle v_2, w_2 \rangle & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \langle v_n, w_n \rangle \end{pmatrix}$$

- Für $A \in M_{n \times n}(K)$, $r = rk(A)$, $Q \in O(n)/U(n)$ gilt $R = \begin{pmatrix} C & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C \in M_{r \times r}(K)$ ODM s.d. $A = QR$
- Falls $A \in GL_n(\mathbb{R})$ existiert eindeutige $Q \in O(n)$ und $R \in GL_n(\mathbb{R})$ ODM mit pos. Elem. entlang der Diagonalen. s.d. $A = QR$
- Definiere für $u \in U$ $\varphi_u : V \to K$ $\varphi_u(v) = \langle v, u \rangle$
- Es gilt $\varphi_u \in V^*$
- $\forall \varphi \in V^* \exists! u \in V$ s.d. $\varphi = \varphi_u$ für $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ IP Raum.
  d.h. V^* und V sind kanonisch isomorph.
- Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ IP Raum über K endl. dim. $U \leq V$.
  Dann ist
  $\Phi(U^\perp) = \{\varphi_u \mid u \in U^\perp\}$ = "Annulator von U"
  $= \{g \in V^* \mid U \subseteq \ker(g)\}$

Adjungierte Abbildung, duale Abbildung, Eigenschaften, Abbildungsmatrix 26.4.25

- Sei $T: V \to W$ linear. Die adjungierte Abbildung $T^*: W \to V$ ist die Abbildung s.d.
  $\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, T^* w \rangle_V \quad \forall v \in V, w \in W$
  $\Rightarrow T^*$ ist wohldefiniert (existiert) und ist linear
- Es gilt $(T^*)^* = T$
- Sei $T^*_{Dual}: W^* \to V^*$ die duale Abbildung
  Dann kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "T^*"] \arrow[d, "\Phi_W"'] & V \arrow[d, "\Phi_V"] \\ W^* \arrow[r, "T^*_D"'] & V^* \end{tikzcd}$$

d.h. $T^* = \Phi_V^{-1} \circ T^*_D \circ \Phi_W$

- Seien V, W, U IP Räume $/K$.
  $S, T: V \to W$ und $R: W \to U$. Dann gilt
  1) $(S+T)^* = S^* + T^*$
  2) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^* \quad \forall \lambda \in K$
  3) $(R \circ T)^* = T^* \circ R^*$

  Ausserdem gilt
  4) $\ker(T^*) = \operatorname{im}(T)^\perp$
  5) $\operatorname{im}(T^*) = \ker(T)^\perp$
- Seien V, W IP Räume $/K$ und $T: V \to W$ linear.
  Seien $B = (v_1 \dots v_n)$, $C = (w_1 \dots w_m)$ ON-Basen von V und W. Sei $A = (a_{ij}) = [T]^B_C$, dann gilt
  $a_{ij} = \langle T v_i, w_j \rangle_W$
- Es gilt $[T^*]^C_B = ([T]^B_C)^*$
- Für $A \in M_{n \times m}(K)$ und Std. IP gilt $(T_A)^* = T_{A^*}$

orthogonale diagonalisierbarkeit, normale Abbildungen und Matrizen, Eigenschaften & Bsp. 26.4.25

- Sei $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ IP Raum über $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. $T: V \to V$ linear. Dann ist T orthogonal diagonalisierbar, wenn V eine orthogonale Basis von EV hat.
- $T: V \to V$ IP Raum über $\mathbb{C}$ ist normal wenn $T \circ T^* = T^* \circ T$ bzw für Matrizen $A^*A = AA^*$
- Wenn T orthogonal diagonalisierbar ist T normal.
- Wenn A normal ist ist $T_A: K^n \to K^n$ normal mit Std. IP
- Wenn T normal ist, ist $[T]_B^B$ für ONB B auch normal.
- Diagonale, unitäre und hermiteschen Matrizen sind normal. Produkte normaler Matrizen sind normal, wenn sie kommutieren.
- Für lineare, normale $T: V \to V$ gilt
  1) $\|Tv\| = \|T^* v\| \quad \forall v \in V$
  2) $\forall \lambda \in K$ ist $T - \lambda \mathbb{1}_V$ normal
  3) v ist EV von T mit EW λ so ist v EV von T^* mit EW $\overline{\lambda}$
  4) Seien v_1, v_2 EV von T mit versch. EW. Dann sind $v_1 \perp v_2$

Spektralsatz über $\mathbb{C}$, Zerlegung normaler Matrizen, Selbstadjungierte Abb/Mat, Spektralsatz über $\mathbb{R}$ 26.4.25

- Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ IP Raum / $\mathbb{C}$, $T: V \to V$ linear. Dann gilt: T normal $\iff$ T orth. diag. Wobei gleiches auch für $\mathbb{R}$ gilt, wenn für V eine Jordan Basis existiert.
- Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ normal. Dann existiert $U \in U(n)$ s.d. $U^* A U$ diagonal ist.
- Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ normal. Dann existieren B hermitesch, U unitär s.d.

  $$A = BU = UB$$

  Falls $A \in GL_n(\mathbb{C})$ sind B und U zudem bis auf einige Operationen eindeutig
- Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ IP Raum / $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$ wir nennen $T: V \to V$ selbst adjungiert, wenn $T = T^*$ bzw für $A \in M_{n\times n}(K)$ wenn $A = A^*$

  $K = \mathbb{C}$: selbst. adj = hermitesch

  $K = \mathbb{R}$: selbst. adj = Symmetrisch
- Für $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ IP Raum über $\mathbb{R}$ und $T: V \to V$ orth. dia. ist T selbstadjungiert
- Wenn $T: V \to V$ selbst adj dann ist $[T]_B^B$ $\forall$ ONB B selbstadj.
- Wenn $A \in M_{n\times n}(K)$ selbst adj ist T_A selbst adj bezüglich Std IP.
- Jede selbst adj Abbildung ist normal
- Wenn $T: V \to V$ selbst adj ist gilt
  1) EW sind in $\mathbb{R}$
  2) $\chi_T(x)$ zerfällt in Linearfaktoren über K
- Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ IP Raum / $\mathbb{R}$ und $T: V \to V$ lin. Dann gilt: T orth. dia $\iff$ T selbst adj. D.h. Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind orth. dia und nicht jede orthogonale Matrix / $\mathbb{R}$ ist / $\mathbb{R}$ orthogonal. dia.

Isometrien, IP und Kern, Abbildungsmatrizen, TFAE für Isom., $SO(n)/SU(n)$, $O(2)$ 30.4.25

- Sei $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle_V)$ und $(W, \langle \cdot , \cdot \rangle_W)$ IP Räume/K.
  Eine Abbildung $T: V \to W$ ist eine Isometrie, wenn $\|Tv\|_W = \|v\|_V \quad \forall v \in V$.
  T ist eine lineare Isometrie, wenn T isometrisch und linear ist.
- Lineare Isometrien haben trivialen Kern $\Rightarrow$ Injektiv
- $T: V \to W$ ist lin. Isom $\Leftrightarrow \langle Tv_1, Tv_2 \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V$
- Wenn $A \in U(n)/O(n)$ ist T_A bezüglich std. IP eine lin. Isom.
- Sei $T: V \to V$ eine lin. Isom. B ON Basis von V. Dann ist $[T]_B^B \in O(n)/U(n)$
- $T: V \to V$ sei linear V IP Raum. TFAE

  1) T isom.
  2) $\exists$ ON Basis $v_1 \dots v_n$ von V s.d. $Tv_1 \dots Tv_n$ ONB.
  3) 2) gilt für alle ON Basen
  4) $TT^* = T^*T = id$
  5) T^* ist isom.
- Bemerke $\det(A \in O(n)) = \pm 1$ $|\det(A \in U(n))| = 1$
- Sei $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$ und
  und $SU(n) := \{B \in U(n) \mid \det(B) = 1\}$ Untergruppe von jeweils $O(n)$ oder $U(n)$
- EW von $A \in O(n)$ sind $\lambda = \pm 1$
- $A \in O(2)$ sind entweder
  1) Rot-Mat der Form $A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
  2) Spiegelung von Rot Mat $A = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

  Falls $\det(A) = 1 \Rightarrow 1)$, $\det(A) = -1 \Rightarrow 2)$

Mehr zu lineare Isometrien in 2/3 dim EVR, orth. / unitär äquivalent, Singulärwertzerlegung, mehr zur adjungierten 3.5.25

- Sei V 2-dim EVR, $T: V \to V$ lin. isom.
  Wenn $\det(T) = 1$, $\exists$ ONB B von V s.d.
  $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Sei $A \in SO(3)$. Dann ist 1 EW von A und $\exists$ ONB $B = (v_1, v_2, v_3)$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ s.d. $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$
  Falls ausserdem -1 EW von A gilt $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$
- $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ orthogonaläquivalent, wenn $\exists P \in O(m), Q \in O(n)$ s.d. $B = PAQ$
  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ unitär äquivalent: analog
- $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ und $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ sind IP Räume, $T: V \to W$ linear mit Rang r. Dann $\exists$ ONB $B = (v_1 \dots v_n)$ und $C = (w_1 \dots w_m)$ sowie eindeutige σ_i mit

  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ s.d.

  $T(v_i) = \begin{cases} \sigma_i w_i & 1 \leq i \leq r \\ 0_W & i > r \end{cases}$ d.h. $[T]_C^B = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \sigma_r & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$

  Dabei heissen die σ_i Singulärwerte
  die Singulärwerte sind die Wurzeln der EW von TT^*
- Bemerke, dass TT^* und T^*T gleiche EW haben.
- $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}/\mathbb{C})$ sind orthogonal / Unitär äquivalent genau dann wenn sie gleich Rang und gleich Singulärwerte haben.
- Es gilt
  $rk(T) = rk(T^*)$, $\ker(TT^*) = \ker(T)$, $im(TT^*) = im(T)$
  $\forall w \in W: \langle w, TT^* w \rangle \geq 0$, TT^* selbst adj., EW von $TT^* \geq 0$

äussere direkte Summe, dim, Vektorräume über freie Mengen, Dimension, 7.5.25

- Die äussere direkte Summe $V \oplus W$ ist die Menge aller Paare (v,w) $v \in V$, $w \in W$. Es gilt
  $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$
  $\alpha(v,w) = (\alpha v, \alpha w)$
  Und manchmal schreiben wir $(v,w) = v \oplus w$
- Sei $v_1 \dots v_n$ und $w_1 \dots w_m$ Basen von V, W
  Dann ist $\{v_1 \oplus 0_W \dots v_n \oplus 0_W, 0_V \oplus w_1 \dots 0_V \oplus w_m\}$ eine Basis von $V \oplus W$ insbesondere gilt dann $\dim(V \oplus W) = n + m$
- ~~Definiere~~ Abbildungen $\iota_V : V \to V \oplus W$, $v \mapsto v \oplus 0_W$
  $\iota_W : W \to V \oplus W$, $w \mapsto 0_V \oplus w$
  Diese sind injektiv und linear, zudem gilt
  $\mathrm{im}(\iota_V) \cap \mathrm{im}(\iota_W) = \{0_V \oplus 0_W\}$, d.h. $\mathrm{im}(\iota_V) + \mathrm{im}(\iota_W) = \mathrm{im}(\iota_V) \oplus \mathrm{im}(\iota_W)$
  und $\iota_V \oplus \iota_W : V \oplus W \to \mathrm{im}(\iota_V) \oplus \mathrm{im}(\iota_W)$
  ist ein kanonischer Isomorphismus.
- Sei S eine beliebige Menge, K ein Körper.
  Der von S erzeugte K-VR $K(S)$ ist wiefolgt def:
  1) $v \in K(S)$ haben Form $v = \sum_{s \in S} \alpha_s \cdot s$, $\alpha_s \in K$ endlich viele $\neq 0$
  2) Addition $\sum_{s \in S} \alpha_s s + \sum_{s \in S} \beta_s \cdot s = \sum_{s \in S} (\alpha_s + \beta_s) \cdot s$
  3) K-Multi $\gamma\left(\sum_{s \in S} \alpha_s s\right) = \sum_{s \in S} \gamma \alpha_s \cdot s$, $\gamma \in K$
- Wenn S endlich ist gilt $\dim K(S) = |S|$ und $\{s \in S\}$ ist Basis von $K(S)$

Tensorprodukt, ~~Beispiele~~ & erste Konstruktion, Universelle Eigenschaft 7.5.25

- Seien V,W endl. dim K-VR mit Basen $v_1 \dots v_n$, $w_1 \dots w_m$
Sei $S = \{ v_i \otimes w_j \mid 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m \}$
Definiere $V \otimes_K W := K(S)$
d.h. die Elemente von $V \otimes_K W$ sind Linearkombi der Form $\sum_{i,j} \alpha_{ij} (v_i \otimes w_j)$, $\alpha_{ij} \in K$
- Es gilt $\dim(V \otimes_K W) = n \cdot m$
- Achtung: obige Def ist Basenabhängig
- Beispiel einer ersten Konstruktion:
$\otimes : V \times W \to V \otimes_K W$
$(v,w) \mapsto \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (v_i \otimes w_j)$ für $v = \sum \alpha_i v_i$, $w = \sum_j \beta_j w_j$
- Seien U,V,W K-VR $v_1 \dots v_n$, $w_1 \dots w_m$ Basen von V,W.
Sei $\Phi : V \times W \to U$ bilinear. Dann $\exists!$ lineare Abbildung $\varphi : V \otimes_K W \to U$ s.d. folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\otimes"'] & U \\ V \otimes_K W \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

D.h. $\varphi \circ \otimes = \Phi$

Dies ist die Universelle Eigenschaft
Alternativ formuliert
$\forall$ bilinearen $\Phi : V \otimes W \to U$ $\exists! \ \varphi : V \otimes_K W \to U$ s.d.
$\Phi(v,w) = \varphi(v \otimes w)$

Isomorphe VR ($X \cong V \otimes_K W$), Tensorprodukt ist kanonisch, (pos. def.), $V \otimes_K W \cong W \otimes_K V$, Komplexifizie 11.5.25

- Sei X K-VR mit bilinearer Abbildung $\tau: V \times W \to X$ Die ebenfalls die Universelle Eigenschaft hat. Dann ist $X \cong V \otimes_K W$
- Das Tensorprodukt ist Basenunabhängig (kanonisch)
- Seien $v \in V$, $w \in W$, $v \neq 0_V$, $w \neq 0_W$. Dann ist $v \otimes w \neq 0_{V \otimes W}$
- $V \otimes_K W \cong W \otimes_K V$
- V sei $\mathbb{R}$-VR mit Basis $v_1 \dots v_n$.

  $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ hat $\mathbb{R}$-Basis $v_1 \otimes 1 \dots v_n \otimes 1, v_1 \otimes i \dots v_n \otimes i$

  Die Einbettung $V \hookrightarrow V \otimes \mathbb{C}$, $v \mapsto v \otimes 1$
- Die $\mathbb{C}$-Skalarmultiplikation auf $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $v \otimes \beta \in V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ Definieren wir als

  $\alpha(v \otimes \beta) = v \otimes (\alpha\beta)$ Dadurch erhält $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ die Struktur eines $\mathbb{C}$-VR mit Basis

  $v_1 \otimes 1 \dots v_n \otimes 1$
- Sei V K-VR endl. dim, L ein Körper $K \subseteq L$. Dann hat $V \otimes_K L$ die Struktur eines L-VR und wir nennen das die "Erweiterung der Skalare von V, von K nach L"

Reiner Tensor, Verknüpfungen/Tensorprodukte, TP von Iso, Dualräume isomorph, Hom(U,V)/Endo(V), p-q-Tensor 14.5.25

- Ein Reiner Tensor ist ein Tensor der Form $v \otimes w$ für $v \in V, w \in W$
  Beispiel für nicht reinen Tensor: $T = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$ in $\mathbb{R}^2$
- Seien $T: V \to V'$, $S: W \to W'$ linear. Dann $\exists!$ $T \otimes S: V \otimes W \to V' \otimes W'$ s.d. $T \otimes S(v \otimes w) = T(v) \otimes S(w)$
- Seien $T: V \to V$, $S: W \to W$ linear. Dann gilt $tr(T \otimes S) = tr(T)\,tr(S)$
  Für $det(T \otimes S) = det(T)^{\dim W} det(S)^{\dim V}$
- Seien U_i, V_i, W_i, $i = 1,2$ K-VR und $T_i: U_i \to V_i$, $S_i: V_i \to W_i$ linear. Dann gilt $(S_1 \otimes S_2) \circ (T_1 \otimes T_2) = (S_1 \circ T_1) \otimes (S_2 \circ T_2)$
- Seien $T: U \to U'$, $S: W \to W'$ Iso. Dann ist $T \otimes S$ Iso mit Inversem $T^{-1} \otimes S^{-1}$
- Seien U, V endl. dim VR. Dann $\exists$ kanonischer Iso.
  $\chi: U^* \otimes V \to Hom_K(U,V)$ s.d. $\forall f \in U^*, v \in V$ gilt
  $\chi(f \otimes v)(u) = f(u)v \quad \forall u \in U$
  Im Spezialfall gilt natürlich $V^* \otimes_K V \cong End_K(V)$
- Sei $x = \sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j$ für Basen $v_1 \dots v_n, w_1 \dots w_m$
  Dann ist $M_x = (\alpha_{ij})$ die Darstellungsmatrix von x.
- Sei V VR$_K$. Seien $p,q \geq 0$. Ein p-q-Tensor ist ein Element von $V^{\otimes p} \otimes_K (V^*)^{\otimes q}$

Symmetrisches Produkt, $\mathrm{Sym}^r \cong S^r$, $\dim(\mathrm{Sym}^r)$, bars and stars, Alternierendes Produkt 18.5.25

- Syntax: $\sigma \in S_r$, wobei S_r die Menge aller Permutationen sind, $\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(r)}$. Dies induziert eine bijektive Abbildung $T_\sigma : V^{\otimes r} \to V^{\otimes r}$
- Das r-fache symmetrische Produkt ist def:
  $\mathrm{Sym}^r V = \{ v \in V^{\otimes r} \mid \sigma(v) = v \ \forall \sigma \in S_r \} \leq V^{\otimes r}$
  D.h. alle $v \in V^{\otimes r}$ die invariant unter allen Permutationen sind z.B. $z = e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1$
- Definiere $U = \mathrm{Span}(v - \sigma(v) \mid v \in V^{\otimes r}, \sigma \in S_r \}) \leq V^{\otimes r}$
  Sei $S^r V = V^{\otimes r}/U$ $\leadsto$ Quotientenraum
  D.h. $\forall v \in V^{\otimes r}$ liegen v und $\sigma(v)$ in selben Nebenklasse von U.
  Die Quotientenabbildung ist dann $\pi : V^{\otimes r} \to S^r V$
- Falls $\mathrm{char}(K) = 0$ ist $\pi|_{\mathrm{Sym}^r}$ Isomorphismus
  D.h. insbesondere $\mathrm{Sym}^r V \cong S^r V$
- Sei V n-dim K-VR. Dann ist
  $\dim(\mathrm{Sym}^r V) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$
- Aus der Kombinatorik: r Sterne und $n-1$ Bars müssen angeordnet werden. Wähle aus $r+n-1$ Symbolen r bzw $n-1$ aus.
- Sei V endl.dim VR. Dass alternierende Produkt ist dann
  $\mathrm{Alt}^r V = \{ v \in V^{\otimes r} \mid \sigma(v) = \mathrm{sgn}(\sigma) v \ \forall \sigma \in S_r \} \leq V^{\otimes r}$

Mehr zu $\mathrm{Alt}^r V$ und $\mathrm{Sym}^r V$ 21.5.25

- Es gilt für K Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und V n-dim VR/K, dass
$$V \otimes V = \mathrm{Alt}^r V \oplus \mathrm{Sym}^r V$$
- Wir können Quotientenraum definieren $U \subseteq V^{\otimes r}$ mit $U = \mathrm{span}(v - \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma(v) \mid \sigma \in S_r, v \in V^{\otimes})$
$$\Lambda^r V := V^{\otimes r}/U$$
- Die Quotientenabbildung ist dann s.g.:
$$\Lambda : V^{\otimes r} \to \Lambda^r V, \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_r$$
wobei die Quotientenabbildung für $\mathrm{char}(K)$ K-linear und alternierend ist.
- Es gilt $\mathrm{Alt}^r V \cong \Lambda^r V$ und für $\mathrm{char}(K) = 0$ induziert Λ einen kanonischen Isomorphismus.
- Es sei $\mathrm{char}(K) = 0$ und V n-dim K-VR. Dann gilt
$$\dim_K(\mathrm{Alt}^r V) = \binom{n}{r}$$
- D.h. für $r > n$ gilt $\Lambda^r V = \{0\}$ und $\dim_K \Lambda^n V = 1$ mit Basis $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ von $\Lambda^n V$
- Sei V n-dim VR mit Basis $v_1 \dots v_n$. Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ und $w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$. Dann gilt $w_1 \wedge \dots \wedge w_n = \det(A) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_n$