Skalarprodukt, Euklidische Norm/Abstand, Dreiecksungleichung 17.2.25
Metrischer Raum

- Das (Standard-)Skalarprodukt (wie in Gymi) $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot y = [x, y] = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- Die Euklidische Norm (Abstand zum Ursprung) $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- Euklidischer Abstand $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

- Dreiecksungleichung $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$ (schnellster Weg ist direkt)

- Metrischer Raum ist eine nicht-leere Menge zusammen mit einer (Abstands-)funktion (X, d) mit $d: X \times X \to [0, \infty)$. Diese Abstandsfunktion nennen wir Metrik, falls

(1) positive Definitheit
$\forall x, y \in X$ gilt $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) Symmetrie
$\forall x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$

(3) Dreiecksungleichung
$\forall x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Beispiel: Diskrete Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Metrischer Raum: Konvergenz, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit
23.2.25

- Es gilt, dass eine Folge in $(\mathbb{R}^n, \|x-y\|)$ genau dann konvergiert, wenn sie koordinatenweise konvergiert.
- <u>Cauchy-Folgen</u> sind analog definiert.
  Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ im metrischen Raum (X,d) ist cauchy, falls
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}_0$ s.d. $\forall n,m \geq N: d(a_n,a_m) < \varepsilon$
- fast analog zu $\mathbb{R}$ haben cauchy-Folgen in metrischen Eigensch
  (1) jede Cauchy-Folge ist beschränkt ($\exists$ "maximaler Abstand")
  (2) konvergente Folge $\Rightarrow$ cauchy-Folge
  (3) Eine cauchy-Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt
- Ein Metrischer Raum heisst vollständig, falls jede cauchy-Folge auch eine konvergente Folge in X ist. (Umkehrung gilt für (2))
- Insgesamt ist $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ für $n \geq 1$ mit der Standardmetrik vollständig.

Offene Ball, offene/abgeschlossene Mengen, Topologien, [3.2.2]
Vereinigungen und Schnitte, inneres, Abschluss, Rand

Im folgenden betrachten wir den Metrischen Raum (X,d)

- Der offene Ball ist für $x \in X$ und $r>0$ geg als:
  $B_r(x) = B(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$
- Eine Teilmenge $A \subset X$ heisst offen, falls
  $\forall y \in A \; \exists B_r(y)$ mit $B_r(y) \subset A$
- Eine Teilmenge $A \subset X$ heisst abgeschlossen, falls
  $X \setminus A$ offen ist.
  Achtung: abgeschlossen $\neq$ nicht offen
- Die Familie aller offenen Teilmengen von X heisst
  die von d erzeugte Topologie.
  $\mathcal{T} = \{A \subset X \mid A \text{ offen}\}$
- Endliche Schnitte und beliebige Vereinigungen von
  offenen Mengen sind offen
- Endliche Vereinigungen und beliebige Schnitte von
  abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.
- Das innere der Teilmenge $A \subset X$ ist geg als
  $A^\circ = int(A) := \bigcup \{E \subset A \mid E \text{ offen}\} \rightsquigarrow$ offen gemäss obigem
- Der Abschluss von A ist die Menge
  $\overline{A} := \bigcap \{A \subset U \mid U \text{ abgeschlossen}\} \rightsquigarrow$ abgeschlossen
- Der (topologische) Rand von A ist $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$

Charakterisierung offener, abgeschlossener Mengen mit Folgen. 23.2.25

(X,d) sei wieder ein metrischer Raum.

- $A \subset X$ ist genau dann offen, wenn für jede konv. Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit GW $x \in A$ gilt
  $$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n > N \quad x_n \in A$$
  "früher oder später laufen wir in die Menge"
- $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, falls für jede konv. Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset A$ mit $x_n \to x$ gilt $x \in A$. "A enthält alle ihre Häufungspunkte"
- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert genau dann, wenn für alle offenen Mengen U mit $x \in U$ gilt
  $$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \quad x_n \in U$$
- (X,d_1) und (X,d_2) sind metrische Räume mit $d_1 \neq d_2$. Diese beiden Räume haben genau dann dieselben konvergenten Folgen, falls die von d_1 und d_2 erzeugten Topologien gleich sind.

MR: ε-δ-stetigkeit, folgenstetigkeit, topologisch stetig, gleichmässig-/lipschitz-stetig 24.2.25

(X, d_X) und (Y, d_Y) seien zwei metrische Räume und $f: X \to Y$ eine Funktion.

- f heisst ε-δ-stetig, falls $\forall x \in X$ gilt $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.d. $d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$
- f heisst folgenstetig, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset X$ mit $x_n \to x \in X$ die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}_0} \subset Y$ gegen $f(x) \in Y$ konvergiert.
- f heisst topologisch stetig, falls das Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ jeder offenen Menge $U \subset Y$ offen in X ist.
- f heisst gleichmässig stetig, falls (unabhängig von x) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.d. $d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$
- f heisst lipschitzstetig, falls $0 < L \in \mathbb{R}$ existiert s.d. $d_Y(f(x), f(x')) \leq L\, d_X(x, x')\ \forall x, x' \in X$

TFAE

(1) f ist ε-δ-stetig

(2) f ist folgenstetig

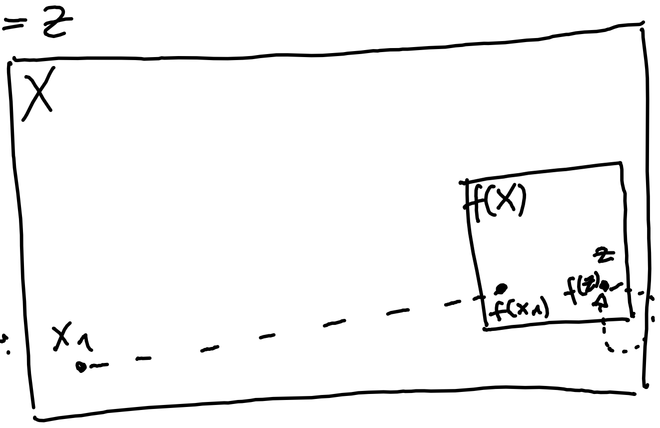
(3) f ist topologisch stetig

Banachscher Fixpunktsatz 26.2.25

Sei (X, d_X) ein vollständiger Metrischer Raum und $f: X \to X$ eine lipschitz-stetige Fkt. mit Lipschitz-Konstante $L<1$, d.h. es soll ein $L<1$ existieren, s.d. gilt

$$d(f(x),f(x')) \leq L\, d(x,x') \quad \forall x,x' \in X$$

Dann gibt es einen eindeutigen Fixpunkt von f, d.h. ein eindeutiges Element $z \in X$ s.d. $f(z)=z$



Anschaulich:

f ist kontraktiv.

Und es gibt einen eindeutigen Attraktor.

Pf.

1) Eindeutigkeit

Nehme an $\exists z_1, z_2 \in X$ s.d. $f(z_1)=z_1$ und $f(z_2)=z_2$ mit $z_1 \neq z_2$

Dann gilt

$$d(z_1,z_2) = d(f(z_1),f(z_2)) \neq 0$$

und

$$d(f(z_1),f(z_2)) < d(z_1,z_2)$$

d.h. zusammengefasst gilt

$$d(z_1,z_2) < d(z_1,z_2)$$

das ist ein Widerspruch, weshalb $z_1 = z_2$.

2) Existenz

Definiere

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als $x_n := f(x_{n-1})$, $x_1 \in X$ beliebig

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als $y_n := f(y_{n-1})$, $y_1 \in X$ beliebig.

Dann gilt für die Folge $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$, dass sie monoton fallend in $\mathbb{R}$ ist und nicht negativ. D.h. sie konvergiert.

Da zudem gilt

$$d(x_n,y_n) < d(f(x_n),f(y_n)) \quad \text{für } x_n \neq y_n,$$

muss also mit $n\to\infty$ gelten $x_n = y_n$.

Da x_1 und y_1 in X beliebig waren betrachten wir insbesondere $y_1 = x_2$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, f(x_n)) = 0$$

D.h. im Grenzfall gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \Rightarrow x = f(x)$$

□

Definition: Folgenkompaktheit, topologische Kompaktheit und totalbeschränktheit 2.3.25

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $K \subset X$ eine Teilmenge

- K heisst Folgenkompakt, falls jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset K$ eine in K konvergente Teilfolge besitzt.
- K heisst topologisch kompakt, falls jede Familie von offenen Mengen $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ welche K überdeckt, d.h. $K \subset \mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. eine endliche Familie, welche K immer noch überdeckt.
- K heisst totalbeschränkt, falls für alle $r > 0$ endlich viele $x_1 \dots x_n \in K$ existieren, s.d. $B_r(x_i, r)$ die Menge K überdeckt.

Kompakt, Heine-Borel, Schnitt von abgeschlossen und kompakter Teilmenge, kompakt ⇒ abgeschlossen, Bild einer kompakten Menge 3.3.25

- Wir nennen eine Menge / Teilmenge kompakt, falls eine der drei äquivalenten Aussagen zutrifft.
  TFAE
  (1) Folgenkompaktheit
  (2) topologische Kompaktheit
  (3) vollständig und totalbeschränkt
- Heine-Borel
  Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.
- (X,d) metrischer Raum. $A \subset X$ abgeschlossen und $K \subset X$ kompakt. Dann ist $A \cap K \subset X$ kompakt.
- In einem metrischen Raum ist jede kompakte Teilmenge abgeschlossen.
- Seien $(X,d_X)(Y,d_Y)$ metrische Räume, $f: X \to Y$ stetig, und $K \subset X$ kompakt. Dann ist $f(K) \subset Y$ kompakt.

Stetige fkt auf komp Mgen, Extrema, anwendung von BFPS (DGL) S.3.25

- (X, d_X) und (Y, d_Y) seien metrische Räume $f: X \to Y$ stetig. Falls X kompakt ist, ist f gleichmässig stetig. (Analog zu Ana I)
- (X, d_X) und $(Y = \mathbb{R}, d_Y = |\cdot|)$ metrische Räume, sowie $f: X \to Y$ stetig, $K \subset X$ kompakt. Dann nimmt f auf K ein max und min an.
  d.h. $\exists \overline{x} \in K$ und $\underline{x} \in K$ s.d.
  $$f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x}) \quad \forall x \in K$$
- Betrachte AWP $y'(t) = f(t, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $y(0) = y_0$
  Nehme an es gebe
  (1) $f(t, y)$ sei auf $D := \{(t, y) \mid |t| \leq t_0, \|y - y_0\| \leq R\} = [-t_0, t_0] \times \overline{B}_R(y_0)$
  definiert und stetig.
  (2) f sei auf D beschränkt, d.h. $\exists K \in \mathbb{R}$ s.d.
  $$\|f(t, y)\| \leq K \quad \forall (t, y) \in D$$
  (3) f sei lipschitz-stetig bezüglich y, d.h. $\exists L \in \mathbb{R}$ s.d.
  $$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in D$$
  (4) t_0 klein genug s.d. $t_0 \leq t_1$, $t_0 K \leq R$, $t_0 L < 1$
  Dann hat unser AWP eine eindeutige Lösung auf $(-t_0, t_0)$
- $y(t)$ sei auf $(-t_0, t_0)$ def und stetig. TFAE
  (1) $y(t)$ ist auf $(-t_0, t_0)$ stetig diff'bar und löst das AWP
  (2) $y(t)$ erfüllt auf $(-t_0, t_0)$ folgende Int. Gl.
  $$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds.$$

Def: Zusammenhängend, Zusammenhangskomponente, verallgemeinerter Zwischenwertsatz 9.3.25

(X,d) sei MR mit $E \subset X$ nicht leer.

- E heisst zusammenhängend, falls für je zwei offene Mengen U_1 und U_2 mit Eigenschaft: $E \cap U_i \neq \emptyset$, $i = 1,2$ und $E \subset U_1 \cup U_2$ gilt, dass $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$
- $F \subset E$ heisst Zusammenhangskomponente von E, falls F nicht leer und zusammenhängend ist und jede weitere Teilmenge $G \subset E$ mit $F \subset G$, $F \neq G$ nicht zusammenhängend ist.

  Anschaulich: Maximale Zusammenhängende Teilmenge
  ↳ Achtung: nicht eindeutig.
- Verallgemeinerter Zwischenwertsatz

  (X, d_X) und (Y, d_Y) MR, $f: X \to Y$ stetig.
  Falls $E \subset X$ zusammenhängend ist, ist auch $f(E) \subset Y$ zusammenhängend.

Kurven, Umparametrisierung, wegzusammenhängend, $\mathbb{R}^n$ 10.3.25

Def: (X,d) MR. Ein Weg/Kurve ist eine stetige Funktion $\gamma:[0,1]\to X$ mit Anfangspunkt $\gamma(0)$ und Endpunkt $\gamma(1)$. Falls $\gamma(0)=\gamma(1)$ nennen wir γ geschlossen. Falls $s:[a,b]\to[0,1]$ bijektiv stetig ist mit stetiger inverser, ist $\gamma\circ s$ eine Umparametrisierung von γ. Falls $s(a)=0$ und $s(b)=1$ nennen wir s orientierungserhaltend. Falls $s(b)=0$ und $s(a)=1$ nennen wir s orientierungsumkehrend.

Def: (X,d) MR. $E\subset X$ heisst wegzusammenhängend, falls für beliebige $x,y\in E$ ein Weg $\gamma:[0,1]\to E$ existiert von $x=\gamma(0)$ zu $y=\gamma(1)$.

- X MR. $E\subset X$ wegzusammenhängend $\Rightarrow$ $E\subset X$ zusammenhängend
- $U\subset\mathbb{R}^n$ mit Standardmetrik und U offen. Dann gilt: U wegzusammenhängend $\Leftrightarrow$ U zusammenhängend
- $r>0$. Dann sind $\mathbb{R}^n, B_r(x)\subset\mathbb{R}^n, \overline{B_r(x)}\subset\mathbb{R}^n$ zusammenhängend für beliebige $x\in\mathbb{R}^n$.

Normen, N ⇒ M, Skalarprodukt, CS, Äquivalenz 10.3.21

- **Def** Eine Norm $\|\cdot\|$ ist eine Abbildung von VR V mit Werten in $\mathbb{R}_0^+$ $\quad \|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_0^+$ mit Eigenschaft:
  (1) $\forall x \in X$ gilt $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ "positiv definitheit"
  (2) $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ "abs. homogenität"
  (3) $\forall x, y \in V$ gilt $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ "Dreiecksungleichung"
- Sei V reeller VR mit Norm $\|\cdot\|$. Dann ist (V,d)
  $d(x,y) = \|x-y\|$ ein MR.
- **Def**: Skalarprodukt ist Abb von $V \times V$ auf $\mathbb{R}$
  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$
  Es gilt für $\forall x, y, z \in V$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  (1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ "Bilinearität"
  (2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ "Symmetrie"
  (3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ "Definitheit"
- V reeller VR. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt und
  $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_0^+$ geg durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$
  Dann gilt CS-ungleichung
  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in V$
- **Def** V reeller VR. $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normen auf V.
  Diese Normen heißen äquivalent, falls $A, B > 0 \in \mathbb{R}$ existieren, s.d.
  $\|v\|_1 \leq A \|v\|_2$ und $\|v\|_2 \leq B \|v\|_1 \quad \forall v \in V$

Diff'barkeit mehrdimensionaler Fkt, Richtungsableitung, Partielle Ableitung

12.3.25

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Fkt.

- f heisst an der Stelle $x \in U$ diff'bar, falls eine Lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert s.d:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - L(h) \|}{\|h\|} = 0$$

Die lineare Abbildung heisst Differential, (totale) Ableitung oder Tangentialabbildung von f an der Stelle x wir schreiben

$$L = Df(x) = df(x) = D_x f$$

f heisst diff'bar, falls f in jedem Punkt aus U diff'bar.

- L ist eindeutig, hängt von x ab, lässt sich rechnen und falls f diff'bar ist gilt

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + L(x) + R(x) \quad \text{mit } R(x) = o(\|x\|)$$

- $f_i : U \to \mathbb{R}$ bezeichnet die i-te Komponente von f.

f diff'bar bei $x \iff f_i$ diff'bar bei x $\forall 1 \le i \le n$

Dann gilt $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$(Df_x(v))_i = (Df_i)_x(v)$$

- Die Richtungsableitung von f bei x in Richtung v, $s \in \mathbb{R}$ ist

$$\partial_v f(x) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(x+sv) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x+sv) - f(x)}{s}$$

sofern dieser GW existiert. Falls $v = e_i$ gilt

$$\partial_{e_i} f(x) = \partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Und wir nennen das die i-te Partielle Ableitung bei x.

Linearität der Richtungsableitung, Jacobi-Matrix, Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit, Kettenregel 14.3.25

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- f sei bei $x \in U$ diff'bar. Dann existiert die Richtungsableitung für beliebige $v \in \mathbb{R}^n$ und $\partial_v f(x) = Df_x(v)$ insbesondere gilt

$$\partial_{\alpha v + \beta w} f(x) = \alpha \partial_v f(x) + \beta \partial_w f(x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, v, w \in \mathbb{R}^n$$

- Nimm an es existiere eine Abbildung. Diese Abbildung $L = Df_x$ lässt sich als Matrix folgendermassen schreiben.

$$[L]_E^E = J = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix}$$

Diese Jacobi-Matrix ist eindeutig bestimmbar. Wofür $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt $J = \nabla f(x)$

- Falls $\forall\, 1 \leq i \leq n$ die partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, ist f auf ganz U diff'bar.
- Kettenregel: $V \subset \mathbb{R}^m$. Falls $f: U \to V$ diff'bar bei x und $g: V \to \mathbb{R}^k$ diff'bar bei $f(x)$ ist $g \circ f$ bei x diff'bar und das Differential ist geg. als

$$D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x$$

respektive als Produkt der Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)$$

- Falls alle partiellen Ableitungen f_i $1 \leq i \leq n$ existieren und stetig auf U sind, nennen wir f stetig diff'bar auf U $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$

Mittelwertsatz, stetig diff'bar, stetige, glatte Fkt., Addition, Multiplikation und verknüpfen. 17.3.25

- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ diff'bar. Ausserdem sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$ s.d. $x + ht \in U \quad \forall t \in [0,1]$.
Dann existiert $\tau \in (0,1)$ s.d. $\xi = x + \tau h$ folgende Gleichung erfüllt
$$f(x+h) - f(x) = Df_\xi(h) = \partial_h f(\xi)$$
- <u>Def</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Fkt und $k \geq 1$. Falls alle partiellen Ableitungen f_i, $1 \leq i \leq n$ existieren und in $C^{k-1}(U, \mathbb{R}^m)$ liegen, sagen wir, dass f k-fach stetig diff'bar ist und schreiben $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$, $C^0(U, \mathbb{R}^m)$ sind alle stetige Funktionen und $C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ alle glatten Fkt. d.h. alle $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ $\forall k \geq 1$.
- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f, g \in C^k(U, \mathbb{R})$ $h \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$ mit $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $h(V) \subset U$. Dann gilt
  (1) $f+g$ und $f \cdot g$ sind in C^k
  (2) $f \circ h$ gehört zu C^k

Satz von Schwarz, Multi-Index, ~~Taylor-Theorem~~, ~~analytische Funktion, Unique-Continuation-Principle~~ 22.3.25

- Der Satz von Schwarz besagt, dass für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R}^m)$ gilt $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq n$
- Ein Multi-Index ist $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Die Länge sei $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_n$. Wir sagen $\beta \leq \alpha$, falls $\beta_i \leq \alpha_i \; \forall i$

  $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$ mit $0! = 1$

Ein Polynom der n Variablen $X_1 \dots X_n$ mit Koeffizienten kann dargestellt werden als

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq h}} c_\alpha X^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq h} c_{(\alpha_1 \dots \alpha_n)} X_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{\alpha_n}$$

Für $f \in C^h$ und $|\alpha| \leq h$ definieren wir

$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$ $\rightsquigarrow$ für theoretical Proofs.

Kritischer Punkt, Extrema, Hesse-Matrix, Laplace-Operator, 22.3.25

- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U)$ und $x_0 \in U$. x_0 ist ein kritischer Punkt, falls $\nabla f(x_0) = 0$
- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U)$ und $x_0 \in U$. Bei x_0 liegt ein lokales Extrema. Dann gilt
  $$\partial_i f(x_0) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$
- Die Hessische Matrix von $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U)$ bei $x \in U$ wird mit $Hf(x)$ bezeichnet oder auch $D^2 f(x)$ und ist geg. durch
  $$H_{ij} f(x) = \partial_i \partial_j f(x) \quad 1 \leq i, j \leq n$$
  umfasst also alle Informationen der zweiten Ableitung in eine Matrix.
- Die Spurabbildung der Hesse-Matrix ist der Laplace operator
  $$\Delta f(x) = tr(Hf(x)) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} f(x)$$

Taylor-Theorem, Analytische Fkt
Unique-continuation-Principle   22.3.25

- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^{k+1}(U)$ $k \geq 0$. $x_0 \in U$. und $h \in \mathbb{R}^n$ s.d. $x_0 + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$f(x_0+h) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq k}} \partial^\alpha f(x_0) \frac{h^\alpha}{\alpha!} + R_{k+1} f(x_0+h)$$

wobei der Rest geg. ist durch

$$R_{k+1} f(x_0+h) = \int_0^1 (k+1)(1-t)^k \cdot \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq k}} \partial^\alpha f(x_0+h) \frac{h^\alpha}{\alpha!} dt = O(|h|^{k+1})$$

- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\infty(U)$ ist analytisch für alle $x_0 \in U$. Dann existieren $\rho > 0$ und C s.d.

$$\sup_{B_{x_0}(\rho)} |\partial^\alpha f| \leq C |\alpha|! (n\rho)^{-|\alpha|}$$

$\Rightarrow$ Partielle Ableitungen

für alle möglichen multiindex α.

Dann gilt für die Taylor-Approx von anal. fkt.

$$f(x_0+h) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq h}} \partial^\alpha f(x_0+h) \frac{h^\alpha}{\alpha!}$$ $\Rightarrow$ absolut konv.

- Seien g und f analytisch und U offen und zusammenhäng. Falls $\exists x_0 \in U$ s.d. $\partial^\alpha f(x_0) = \partial^\alpha g(x_0)$ $\forall \alpha$
Dann gilt $f(x) = g(x)$ $\forall x \in U$

Kritische Punkte, Definitheit, Extrema, Lagrange-Multiplikator 24.3.25

- Ein kritischer Punkt $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ offen, von $f \in C^1(U)$ erfüllt $\nabla f(x_0) = 0$.
  $\leadsto$ Kandidat für Extrema
- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und bei $x_0 \in U$ liegt ein lokales Extremum. Dann gilt
  $\partial_i f(x_0) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$
- Eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst
  1) positiv definit, falls alle EW > 0
  2) negativ definit, " EW < 0
  3) indefinit, falls EW sowohl pos als auch neg sind.
  4) Degeneriert, falls 0 EW ist.
- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^3(U)$ und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt.
  1) Falls $Hf(x_0)$ pos. def $\Rightarrow$ lokales Minimum
  2) " neg. def. $\Rightarrow$ lokales Maximum
  3) " indefinit $\rightarrow$ Sattelpunkt
- Beachte dass für globale Extremalstelle zusätzlich das Verhalten am Rand der Menge betrachtet werden muss.
- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g_1, \dots g_k \in C^1(U)$ und
  $M := \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\} \neq \emptyset$
  und $f|_M$ habe an der Stelle x_0 eine lokale Extremalstelle und ∇g_i sind linear unabhängig. Dann ist $\nabla f(x_0)$ eine Linearkombi von $\nabla g_1(x_0) \dots \nabla g_k(x_0)$

Implizite Fkt, ~~Untermannigfaltigkeiten, Tangentenräume~~

- Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-d})$ $(0 < d < n \in \mathbb{N})$. Einen Punkt in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ schreiben wir als (x, y) mit $x \in \mathbb{R}^d$ und $y \in \mathbb{R}^{n-d}$. Ausserdem sei $(x_0, y_0) \in U$ s.d. $f(x_0, y_0) = 0$ und s.d. die $n-d \times n-d$-Matrix

$$J_y f(x_0, y_0) = (\partial_{y_i} f_j(x_0, y_0))_{1 \le j, i \le n-d}$$

invertierbar sei. Dann existiert für $r, s > 0$ (klein genug) eine Fkt $g : B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^d \to B_s(y_0) \subset \mathbb{R}^{n-d}$ s.d. für alle $(x, y) \in U_0 := B_r(x_0) \times B_s(y_0) \subset U$ gilt

$$f(x, y) = 0 \iff g(x) = y$$

Ausserdem gilt für alle $x \in B_r(x_0)$

$$Jg(x) = -((J_y f)(x, g(x)))^{-1} (J_x f)(x, g(x))$$

wobei

$$J_x f(x, y) = (\partial_{x_i} f_j(x, y))_{1 \le j \le n-d,\, 1 \le i \le d}$$

Schliesslich ist

$$g \in C^k(B_r(x_0), \mathbb{R}^d) \text{ falls } f \in C^k(U, \mathbb{R}^{n-d})$$

Untermannigfaltigkeiten und Tangentenräume 31.3.25

- Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heisst k-dim Untermannigfaltigkeit der Klasse C^m $m \geq 1$, falls für jeden Punkt $x_0 \in S$ eine Umgebung (insbesondere ein Ball) W und ein Diffeomorphismus $\Psi \in C^m(W, \mathbb{R}^n)$ von W auf $V = \Psi(W) \subset \mathbb{R}^n$ existiert, s.d. gilt
$$\Psi(S \cap W) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0 \in \mathbb{R}^{n-k}\}),$$
wobei ein Diffeomorphismus eine Bijektion mit stetiger Inverser ist.
- Sei S eine k-dim Untermannigfaltigkeit der Klasse C^m, $m \geq 1$. Zu $x_0 \in S$ betrachten wir Kurven $\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), S)$ mit $\gamma(0) = x_0$.
Der Raum
$$T_{x_0} S := \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), S), \gamma(0) = x_0\}$$
heisst Tangentialraum an S bei x_0.
- Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g \in C^m(U, \mathbb{R}^k)$ $k < n$ und $b \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert, d.h. für alle Elemente in $g^{-1}(\{b\})$ hat Dg an diese Stelle maximalen Rang. Dann gilt für $S = g^{-1}(\{b\})$, dass $T_{x_0} S = \ker(Dg\, x_0)$ $\forall x_0 \in S$
$\hookrightarrow$ Bemerke, dass für $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt $Dg = (\nabla g)^T$
d.h. Tangentialraum wird von denjenigen Vektoren aufgespannt, die senkrecht auf Grad sind.

Umkehrfunktion, Inverse lineare Abbildung 3.4.25

- Es sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf einer Umgebung von x_0 (d.h. auf einem Ball mit genügend kleinem Radius) stetig differenzierbar, und Df_{x_0} sei invertierbar.
  Dann gilt für eine genügend kleine offene Umgebung U von x_0:
  1) f bildet U bijektiv auf eine offene Umgebung $V := f(U)$ von $f(x_0)$ ab.
  2) $f^{-1}: f(U) \to U$ ist stetig differenzierbar mit
     $$D(f^{-1}) = (Df)^{-1}$$
     "Ableitung der Umkehrfunktion ist Kehrwert der Ableitung"
- Sei $L_0: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbare lineare Abbildung und es sei L eine weitere lineare Abbildung mit
  $$\|L - L_0\| < \frac{1}{\|L_0^{-1}\|}$$
  Dann ist L invertierbar mit
  $$L^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(L_0^{-1}(L_0 - L)\right)^k L_0^{-1}$$
  Ausserdem gilt
  $$\|L^{-1}\| \leq \frac{\|L_0^{-1}\|}{1-r} \text{ mit } r := \|L_0^{-1}\| \cdot \|L_0 - L\|$$
  und
  $$\|L^{-1} - L_0^{-1}\| \leq \frac{r}{1-r} \|L_0^{-1}\|$$
  Diese obige Reihe heisst Neumann-Reihe

Zerlegung, Feinheit, Charakteristische Fkt, TF,
R-int von TF, Eigenschaften des R-int 21.4.25

- Eine Zerlegung $P = \{Q_k, 1 \le k \le K\}$ eines Quaders $Q = \bigcup_{k=1}^{K} Q_k$ in disjunkte Teilquader $Q_k \subset Q$ hat die Feinheit $\delta_P := \max_{1 \le k \le K} \operatorname{diam} Q_k$

  wobei der Durchmesser von Q_k geg. ist als
  $\operatorname{diam} Q_k := \sup_{x,y \in Q_k} \|x-y\|$, $1 \le k \le K$

  Eine Zerlegung $\tilde{P}$ ist eine Verfeinerung der Zerlegung, falls jedes $\tilde{Q}_j$ in einem Q_k enthalten ist
- Q sei abgeschlossener und beschränkter Quader
  Eine TF $f: Q \to \mathbb{R}$ ist eine Fkt, welche dargestellt werden kann als $f = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{Q_k}$ mit Konstanten $c_k \in \mathbb{R}$ und der char. Fkt von Q_k d.h.

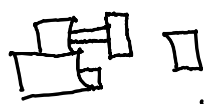
  $$\chi_{Q_k}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in Q_k \\ 0 & \text{falls } x \notin Q_k \end{cases}$$
- Das R-int der TF $f = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{Q_k}$ ist geg als
  $\int_Q f \, d\mu = \int_Q \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{Q_k}(x) \, d\mu = \sum_{k=1}^{K} c_k \mu(Q_k)$
- Oberes R-int ist geg: $\underline{\int_Q} f(x) \, d\mu := \sup \{ \int_Q s(x) \, d\mu \mid s \text{ TF mit } s \ge f \}$
  unteres ist analog definiert
- Für mehrdim R-int gilt
  1) Stetigkeit $\Rightarrow$ R-int'barkeit
  2) Monotonie $f \le g \Rightarrow \int_Q f \, d\mu \le \int_Q g \, d\mu$
  3) Linearität $\int_Q (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_Q f \, d\mu + \beta \int_Q g \, d\mu$
  4) Dreiecksungleichung $\left| \int_Q f(x) \, d\mu \right| \le \int_Q |f(x)| \, d\mu \le \sup_Q |f| \, \mu(Q)$
  5) seien f, g beschränkt und R-int'bar
     $\min\{f,g\}$ und $\max\{f,g\}$ sind auch R-int'bar

Satz von Fubini, Anwendungen zu Fubini 21.4.25

- Es seien $Q_1 \subset \mathbb{R}^r$ und $Q_2 \subset \mathbb{R}^s$ zwei Quader und entsprechend $\mathcal{U} := Q_1 \times Q_2$ ein Quader in $\mathbb{R}^{r+s}$ und wir bezeichnen
  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{r+s}$
  Ausserdem sei $f(x,y)$ über $\mathcal{U}$ R-int'bar und für fixiertes $x \in Q_1$ sei die Fkt
  $f_x : y \mapsto f(x,y)$ über Q_2 R-int'bar.
  Dann ist $F(x) := \int_{Q_2} f(x,y)\,dy$ über Q_1 R-int'
  und es gilt
  $$\int_{\mathcal{U}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{Q_1} F(x)\,dx = \int_{Q_1}\int_{Q_2} f(x,y)\,dy\,dx$$
  Bemerke, dass dabei die Rolle von x und y vertauscht werden können $\Rightarrow$ Reihenfolge irrelevant
- Sei $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ ein n-dim Quader der beschränkt und abgeschlossen ist.
  $f : Q \to \mathbb{R}$ sei R-int'bar. Dann gilt
  $$\int_Q f\,d\mu = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1 \ldots x_n)\,dx_n\right) \ldots dx_1$$
  und die Reihenfolge der Integration kann beliebig vertauscht werden

Jordan-Messbarkeit, Elementarfiguren, Vereinigungen und Durchschnitte J.m. Mengen, TFAE zu J.m. 21.4.25

- Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst Jordan-messbar (J.m.) falls es einen abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq Q$ gibt s.d. die charakteristischen Fkt von B auf Q R-int'bar ist.
  Das Volumen/Inhalt von B ist dann definiert als
  $$\mathrm{vol}(B) = \mu(B) = \int_Q \mathbb{1}_B \, d\mu = \int_Q \chi_B \, d\mu$$
  und wird auch n-dim Jordan-Mass von B genannt.
- Eine Menge E der Form $E = \bigcup_{k=1}^{K} Q_k$, wobei Q_k, $1 \le k \le K$ disjunkte Quader sind nennen wir Elementarfiguren



- Endliche Durchschnitte und Vereinigungen von J.m. Fkt sind wieder J.m. und El.Fig. sind J.m.
  A, B ~~seien~~ J.m. $\Rightarrow$ $A \setminus B$ ist Jm mit
  $$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$
- TFAE für $\Omega \in \mathbb{R}^n$ beschränkt
  1) Ω ist J.m
  2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ el.Fig $E, G \subset \mathbb{R}^n$ mit $E \subset \Omega \subset G$ und
  $$\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) < \varepsilon$$
  3) $\partial\Omega$ ist J.m. und $\mu(\partial\Omega) = 0$, d.h. der Rand ist eine Jordan-Nullmenge.

  Für jeden dieser Fälle gilt
  $$\mu(\Omega) = \inf\{\mu(G) \mid G \supset \Omega \text{ el.Fig}\} = \sup\{\mu(E) \mid E \subset \Omega \text{ el.Fig}\}$$

Eigenschaften des Jordan-Masses, Jordan/Legesbue Nullmenge 21.4.25

- Eigenschaften des Jordan-Masses

1) Subadditivität
Seien $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ J.m. $(1 \le k \le K)$. Dann ist
$\bigcup_{k=1}^{K} \Omega_k$ J.m. und es gilt
$\mu(\Omega) \le \sum_{k=1}^{K} \mu(\Omega_k)$

2) Translationsinvarianz
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ J.m. und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist
$\Omega + a$ ebenfalls J.m. und es gilt $\mu(\Omega) = \mu(\Omega + a)$

3) Rotationsinvarianz
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ J.m. und es sei $R \in SO(n)$
Dann ist $R\Omega := \{Rx \mid x \in \Omega\}$ auch J.m
und es gilt $\mu(\Omega) = \mu(R\Omega)$. ($R$ ist Rot-Mat)

- Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nennen wir Jordan-Nullmenge, falls $\forall \varepsilon > 0$ die Menge Ω mit <u>endlich</u> vielen abgeschlossenen Quadern Q_i überdeckt werden kann s.d. $\Omega \subset \bigcup_i Q_i$ und $\sum_i \mu(Q_i) < \varepsilon$

Die Menge heisst Legesbue-Nullmenge, falls gleiches für abzählbar viele abgeschlossene Quader Q_i gilt.

Tatsachen zu ~~Jordan~~-Nullmengen, Lebesgue-Int'barkeit (für allgemeine Mengen), Bilder von J. Nullmengen 28.4.25

- J. Nullmenge ⇒ L. Nullmenge
- Teilmengen von Nullmengen sind auch Nullmengen
- J. Nullmenge ist beschränkt
- endliche Vereinigung von J. Nullmengen ist J. Nullmenge
- abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist Nullmenge
- abzählbare Menge ist Nullmenge
- Abschluss einer J. Nullmenge ist J. Nullmenge
- kompakte abzählbare Nullmengen sind J. Nullmengen
- Sei $f: Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem Quader $Q \subset \mathbb{R}$. Dann ist f über Q genau dann R-int'bar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine (Lebesgue-)Nullmenge ist, d.h. genau dann, wenn f fast überall stetig ist.
  ↳ gleiches gilt auch für allgemeine $\Omega \subset \mathbb{R}$, solange Ω J.m. ist.
- Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und $X \subset G$ eine kompakte J. Nullmenge. Dann ist $f(X)$ auch eine J. Nullmenge.
- Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$ mit $n < m$ und $X \subset G$ eine kompakte Menge. Dann ist $f(X)$ auch eine J. Nullmenge.

Mass des Bildes einer Lin. Abb., Transformationssatz, Substitutionsregel 28.4.25

- Sei $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, und es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und J.m.
  Dann ist die Menge $A\Omega = \{Ax \mid x \in \Omega\}$ J.m und
  $\mu(A\Omega) = |\det(A)| \mu(\Omega)$
- Der Transformationssatz besagt, dass für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Diffeomorphismus auf $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und J.m gilt, dass auch $\varphi(\Omega)$ J.m. ist mit
  $$\mu(\varphi(\Omega)) = \int_\Omega |\det(D\varphi(x))| \, d\mu(x)$$
  wobei $D\varphi(x)$ die Jacobi-Mat von φ ist.
- Die Substitutionsregel besagt, für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Diffeomorphismus auf $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und J.m. und $f: \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ beschränkt und R-int'bar gilt, dass die Fkt. $(f \circ \varphi)|\det(D\varphi)|: \Omega \to \mathbb{R}$ ebenfalls R-int'bar mit
  $$\int_{\varphi(\Omega)} f \, d\mu = \int_\Omega (f \circ \varphi) \cdot |\det(D\varphi)| \, d\mu$$
  wobei $D\varphi$ wiederum die Jac-Mat ist.

Parametrisierung, (momentane) Geschwindigkeit, Länge, Gramsche Determinante, Flächeninhalt S.S.25

- Eine Parametrisierung ist eine Beschreibung / Darstellung einer Kurve / Fläche oder allg. Körpers, als Funktion in einer oder mehr Parameter
- Sei $t \in [a,b] \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ eine stetig diff'bare Abbildung (Parametrisierung einer Kurve)
  - Die (momentane) Geschwindigkeit ist dann geg:

    $$\vec{v}(t) := \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

    $\vec{v}$ zeigt in Richtung der Bewegung und Tangential
  - Die Länge einer Kurve ist gegeben als:

    $$L := \int_a^b \|x'(t)\| dt$$

    Die Länge ist unabhängig von der behandelten Parametrisierung vorausgesetzt sie durchläuft jeden Punkt einmal.
- Sei $(s,t) \in B \mapsto x(s,t) \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ eine stetig diff'bare Abbildung (Parametrisierung einer Fläche)
  - Die Gramsche Determinante ist definiert als

    $$\mathrm{Gram}(v_s, v_t) := \det \begin{pmatrix} v_s \cdot v_s & v_s \cdot v_t \\ v_t \cdot v_s & v_t \cdot v_t \end{pmatrix}$$

    wobei $v_s = \frac{dx}{ds}$, $v_t = \frac{dx}{dt}$

    Es gilt $\mathrm{Gram}(v_s, v_t) = \| v_s \times v_t \|^2$
  - Der Flächeninhalt ist definiert als

    $$F := \int_B \sqrt{\mathrm{Gram}(v_s, v_t)}\, ds\, dt = \int_B \| v_s \times v_t \| \, ds\, dt$$

Vektorfeld, k-lineare alternierende Abbildungen, schiefes Produkt 7.5.25

- Ein Vektorfeld mit Definitionsbereich $B \subset \mathbb{R}^n$ ist eine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion auf B.

$$V(x) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \equiv \sum_{i=1}^{n} v_i \partial x_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Ein Vektorfeld ist stetig/diff'bar/C^n etc., wenn jede Komponente die entsprechende Eigenschaft besitzt. Bemerke hier, dass der ('$\equiv$') keine Algebraische Gleichheit bedeutet, sondern eine Äquivalenz in Funktion.

- Eine k-lineare Abbildung $\lambda : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nennen wir alternierend/schiefsymmetrisch, falls gilt

$\lambda(v_1 \ldots v_i \ldots v_j \ldots v_k) = -\lambda(v_1 \ldots v_j \ldots v_i \ldots v_k) \quad \forall v_1 \ldots v_k \in \mathbb{R}^n$

und wir definieren die Menge aller k-linearen, alternierenden Fkt

$$\Lambda^k \mathbb{R}^n = \{\lambda : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-mal}} \to \mathbb{R} \mid \lambda \text{ k-linear, alternierend}\}$$

Ausserdem definieren wir für $\mu \in \Lambda^k \mathbb{R}^n, \nu \in \Lambda^s \mathbb{R}^n$ $\mu \wedge \nu \in \Lambda^{k+s} \mathbb{R}^n$ wiefolgt

$$(\mu \wedge \nu)(x_1 \ldots x_{k+s}) = \frac{1}{k!s!} \sum_{p} \operatorname{sgn}(p) \mu(x_{p(1)} \ldots x_{p(k)}) \nu(x_{p(k+1)} \ldots x_{p(k+s)})$$

wobei wir über alle Permutationen von $\{1 \ldots k+s\}$ summieren mit $\operatorname{sgn}(p) = (-1)^{\#\text{Vertauschungen in } 1}$

Wir nennen $\wedge : \Lambda^k \mathbb{R}^n \times \Lambda^s \mathbb{R}^n \to \Lambda^{k+s} \mathbb{R}^n$ das schiefe Produkt.

k-Formen und die äussere Ableitung 11.5.25

- Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine k-Form der Klasse C^m auf Ω ist eine Abbildung $\lambda : \Omega \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ mit

$$\lambda(x) = \sum_{1 \le i_1 \dots \le i_k \le n} \lambda_{i_1 \dots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Dabei sind $\lambda_{i_1 \dots i_k}(x)$ die Koeffizienten abhängig von x und der Permutation $i_1 \dots i_k$. $\lambda_{i_1 \dots i_k} \in C^m(\Omega)$.
Wir schreiben $\lambda \in C^m(\Omega; \Lambda^k \mathbb{R}^n)$.
dx^{i_j} ist dabei eine lin. Abb. (1-Form), welche die i_j-te Komponente des darauf angewendeten Vektors zurück gibt.

- Sei λ eine k-Form. Dann ist die äussere Ableitung von λ die $(k+1)$-Form $d\lambda$ welche gegeben ist durch

$$d\lambda = \sum_{i_1 \le \dots \le i_k} d\lambda_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$= \sum_{i_1 \le \dots \le i_k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Linienintegrale, unterteilung, stetige Vektorfelder und stetig diff'bare Kurven, ~~Bemerkungen zu k-Formen~~ 12.5.25

- $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V(x)$ stetiges Vektorfeld auf B, $\gamma: t \mapsto \gamma(t) \in B$, $t \in [a,b]$ stückweise stetig diff'bare Kurve.
  Dann ist das Linienintegral (Wegintegral) von V entlang von γ definiert durch
  $$\int_\gamma V \cdot ds := \int_a^b V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$
  Respektive für eine 1-Form $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ auf $B \subset \mathbb{R}^2$
  $$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy := \int_a^b \left(P(x,y)\frac{d\gamma_1}{dt} + Q(x,y)\frac{d\gamma_2}{dt}\right)dt$$
- Es lassen sich für viele Kurven Ketten, d.h. Summen von einzelnen Teilstrecken berechnen (einfacher)
- Analog zu Vek-Feldern, lassen sich stetige Skalare $\rho(x)$ entlang von γ integrieren
  $$\int_\gamma \rho(x) ds = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \, \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$
- Für $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V(x)$ stetiges Vektorfeld auf B und $\gamma: t \mapsto \gamma(t)$, $t \in [a,b]$ stückweise stetig diff'bare Kurve in B. gelten folgende
  1) $\left|\int_a^b V(x) ds\right| \leq \underbrace{L(\gamma)}_{\text{Länge von } \gamma} \sup\{\|V(\gamma(t))\| \mid a \leq t \leq b\}$
  2) Für $\psi: [c,d] \to [a,b]$ ein stückweise stetig diff'baren Homöomorphismus (stetige Bijektion mit stetiger Inverser) und $\tilde{\gamma}: t \mapsto \gamma(\psi(t))$, $c \leq t \leq d$ gilt:
  $$\int_{\tilde{\gamma}} V(x) \cdot ds = \int_\gamma V \cdot ds$$
  $\Rightarrow$ Bei Orientierungserhaltung ist Linienintegral invariant
  3) Sei $-\gamma: t \mapsto \gamma(-t)$, $-b \leq t \leq -a$, dann gilt:
  $$\int_{-\gamma} V(x) ds = -\int_\gamma V(x) ds$$

Summe von Wegen, Ketten, Linienintegral von Ketten, Oberflächenintegral, Flussintegral 14.5.25

- Es seien $\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ mit $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_1)$ etc. stückweise stetig diff'bare Kurven. Dann ist die Summe dieser Kurven definiert als $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$

$$(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [t_0, t_1] \\ \gamma_2(t) & t \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \end{cases}$$

- Seien $\gamma_1, \gamma_2 \ldots$ etc wie vorher. Dann ist eine endliche ganzzahlige Linearkombination eine Kette

$$\gamma := \sum_i k_i \gamma_i \quad , k_i \in \mathbb{Z}$$

und das Linienintegral eines stetigen Vektorfeldes $V(x)$ entlang einer solchen Kette ist gegeben durch

$$\int_\gamma V \cdot ds := \sum_i k_i \int_{\gamma_i} V ds$$

- Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\rho(x)$ stetig und reell-wertig auf B, $p : (s,t) \mapsto p(s,t) \in B$ $(s,t) \in G$ stetig diff'bare (Parametrisierung einer Fläche $im(p) = F \subset G$). Das Oberflächenintegral von ρ über die Fläche F ist wie folgt gegeben

$$\int_F \rho \, d\sigma = \int_G \rho(p(s,t)) \|p_s \times p_t\| \, d\mu \text{ , wobei } p_s = \frac{\partial p}{\partial s}, p_t = \frac{\partial p}{\partial t}$$

- Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ offen, $V(x)$ ein stetiges Vektorfeld auf B und $p : (s,t) \mapsto p(s,t) \in B$, $(s,t) \in G$ stetig diff'bar (Parametrisierung einer Fläche $im(p) = F \subset B$)

Das Flussintegral von V über die Fläche F ist gegeben:

$$\int_F V \cdot n \cdot d\sigma = \int_G V(p) \cdot \frac{p_s \times p_t}{\|p_s \times p_t\|} \|p_s \times p_t\| d\mu = \int_G V(p)(p_s \times p_t) \, ds \, dt$$

Dabei ist n der normierte Normalenvektor zur Fläche.

Pullback, orientierbare Untermannigfaltigkeiten*, eingebettete Untermannigfaltigkeiten mit Rand*, intrinsischer Rand*, Orientierung, Verträglichkeit mit Orientierung*, Satz von Stokes,
*=(Informal) 17.5.23

- Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, λ eine stetige h-Form auf B und $p: s \in G \subset \mathbb{R}^h \mapsto p(s) \in B \subset \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar (Parametrisierung einer h-Fläche $im(p) = F \subset B$). Das Integral von λ über die h-Fläche F ist dann gegeben:

$$\int_F \lambda d\sigma = \int_F \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_h \le n} \lambda_{i_1 \dots i_h}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_h}\, d\sigma$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_h \le n} \int_G \lambda_{i_1 \dots i_h}(p(s)) \cdot \det \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{i_1}}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial p_{i_1}}{\partial s_h} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial p_{i_h}}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial p_{i_1}}{\partial s_h} \end{vmatrix} d\mu$$

wobei der letzte Integrand Pullback von λ heisst.
- Eine Untermannigfaltigkeit ist orientierbar, wenn wir einen globalen, stetigen nichtverschwindenden Normalenvektor definieren können. Orientierung ist wohldefiniert (z.B. 'oben')
- Klassische Untermannigfaltigkeiten sind randlos (kein intrinsischer Rand) d.h. $S \cong \mathbb{R}^h$ aber eingebettete Untermannigfaltigkeiten mit Rand sind $S \cong \mathbb{R}^h_+$ d.h. können intrinsischen Rand haben
- Sei S eine orientierbare, kompakte, h-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Wir setzen $s = n - h$. Eine Orientierung von S ist eine Familie $V = (v_1 \dots v_s) \in C^0(\overline{S}; \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ (s-mal)) von paarweise orthogonalen Vektorfeldern $v_i(p) \in T_p^\perp S$, $p \in S$, $1 \le i \le s$
- (Zu oben) die Parametrisierung von φ von $S = \varphi(\Omega)$ ist mit der Orientierung $V = (v_1 \dots v_s)$ verträglich, falls gilt:

$$\det\left(v_1 \circ \varphi, \dots, v_s \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^h}\right) > 0 \quad \text{in } \overline{\Omega}$$

- Sei S kompakt, orientierbar, h-dimensionale Untermannigfaltigkeit, von $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^2 mit relativem Rand ∂S der Klasse C^1_{pw}, und es sei $\lambda \in C^1(W; \Lambda^{h-1}\mathbb{R}^n)$ in der Umgebung W von S. Dann gilt

$$\int_{\partial S} \lambda = \int_S d\lambda$$, wobei ∂S verträglich mit S orientiert ist.

Satz von Green, Rotation, konservative V.F., Normalbereiche 19.5.23

- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und von der Klasse $C^1 pw$, es sei $V \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{rot}(V)\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} V \cdot ds$$

wobei der Rand so parametrisiert wird, dass er positiv orientiert ist (d.h. Ω ist immer zur Linken)

- Die Rotation ist für $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ definiert. Für $\mathbb{R}^n, n > 3$ ist die Definition komplizierter.

$\mathbb{R}^2$: $V = \begin{pmatrix} V_1(x,y) \\ V_2(x,y) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{rot} V = \dfrac{\partial V_2(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial V_1(x,y)}{\partial y}$

$\mathbb{R}^3$: $\operatorname{rot} V = \nabla \times V$

- Ein Vektorfeld nennen wir konservativ, wenn Linienintegrale wegunabhängig sind und nur von Anfangs und Endpunkt abhängen.
- V ist konservativ $\Rightarrow \operatorname{rot} V = 0$ (D.h. Gradientenfelder $V = \nabla\varphi$ sind immer konservativ, da $\nabla \times \nabla\varphi = 0$)
- Falls V ein C^1 Vektorfeld mit $\operatorname{rot} V = 0$ ist und auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet (keine Löcher) $\Rightarrow V$ ist konservativ
- Ein Gebiet ist genau dann x-oder y-normal wenn es zusammenhängend ist und sich in jeder x- (bzw y-) Richtung vollständig mit durchgehenden, zusammenhängenden vertikalen (bzw horizontalen) Liniensegmenten abdecken lässt. $\rightsquigarrow$ Dann kann das Gebiet als kartesische Koordinaten ausgedrückt werden, wobei für x-normal

$$A = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\} \quad (x,y \text{ kartesisch.})$$

Satz von Poincaré, Einfach zusammenhängende Mengen, 1.6.25
Partielle Integration, Green, Gauss und Stokes klassisch

- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ von Klasse C^1_{pw} zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Ausserdem $V \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$
Dann TFAE:
i) V ist konservativ (d.h. Linienint sind Wegunabhängig bzw V ist Gradientenfeld)
ii) $\operatorname{rot} V = 0$
- Eine Menge M mit der Eigenschaft, dass jede geschlossene Kurve (ohne Selbstschnitte) zu einem Punkt $P \in M$ zusammengezogen werden kann ist einfach zusammenhängend.
Äquivalent: Der Rand ∂M hat nur eine Zusammenhangskomp.
(→ wird auch Nullhomotopie)
- Sei $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und von der Klasse C^1_{pw}, $V \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ und $f \in C^1(\bar{\Omega})$. Dann gilt:

$$\int_\Omega \nabla f \cdot V \, d\mu = \int_{\partial\Omega} (fV) \cdot n \cdot d\sigma - \int_\Omega f \operatorname{div} V \, d\mu$$

<u>Green</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, C^1_{pw}, $V \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, Ω ist links vom $\partial\Omega$

$$\int_\Omega \operatorname{rot} V \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} V \, ds$$

<u>Gauss</u> $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$, C^1_{pw}, $V \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, n äussere Normale

$$\int_\Omega \operatorname{div} V \, d\mu = \int_{\partial\Omega} V \cdot n \cdot d\sigma$$

<u>Stokes</u>

$S \subset \mathbb{R}^3$ kompakt, orientiert, C^2 mit Rand C^1_{pw}
∂S pos. Orientiert. $V \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$

$$\int_S \operatorname{rot} V \, n \, d\sigma = \int_{\partial S} V \, ds$$