Physik-Olympiade Vorbereitungsdokument

Work in Progress

Ruben E. Leuzinger

Februar 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieses Dokument sollte als eine übersichtliche Niederschrift und Zusammenfassung des Stoffs für die Physik Olympiade 2023 gelten. Das Ziel ist es, jedes Thema aufzugliedern und wichtige Formeln per Hand, wenn möglich auf Matur-Niveau herzuleiten. Das Dokument gilt nicht als Enzyklopädie und nur als Niederschrift meines begrenzten, persönlichen Wissens. Ebenso, kann das hier enthaltene Wissen Fehlinformationen oder Ungenauigkeiten beinhalten, weshalb es gilt, diese Arbeit mit Vorsicht zu geniessen. Unter keinen Umständen sollte dieses Dokument als Quelle verwendet werden!

Um den eigenen Schreibfluss zu optimieren, werde ich mich zudem nicht auf Quellen beziehen, kein Abbildungsverzeichnis einbauen und der Rechtschreibung sowie Schönschreibung keine grosse Achtung schenken. Die meisten Informationen beziehe ich aus dem Physik Olympiade Skript (2022 Version), dem Physik Skript von Florian Leupold, dem Tiper Physik Buch sowie dem Internet (u.a. die Feynman Lecture Seite).

Falls ich mich dazu entscheide dieses Dokument zu teilen, würde ich mich über Verbesserungsvorschläge und kritisches Hinterfragen meiner Notizen freuen. Dafür sollte ich unter ruleu@gmx.ch erreichbar sein.

best of luck

Ruben :)

2 Theorie

2.1 Mechanik I

Die Mechanik als eines der grössten Bereiche der Physik beschäftigt sich mit der Frage, wie sich ein bestimmter Körper bewegt. In der Mechanik werden Ursprünge und Gründe für das Vorhandensein einer Kraft nicht diskutiert, einzig die Einflüsse auf den jeweiligen Körper werden besprochen.

In der Mechanik wird, um gewisse Systeme zu vereinfachen, von einer Punktähnlichen Eigenschaft des Körpers ausgegangen. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Körper starr ist und sich Kräfte innerhalb des Körper zu Null vereinfachen lassen. Man spricht von der Kinematik Punktähnlicher Teilchen.

2.1.1 Newtonsche Axiome

Ein Hauptbegründer der uns heute bekannten Mechanik ist Isaac Newton. Unter anderem entwickelte er drei Axiome, welche als Grundlage und Bausteine für die gesamte Mechanik gilt.

lex prima: Trägheitsprinzip

Ein Körper bleibt in Ruhe oder gleichförmiger Bewegung, solange er keine äusseren Kräfteeinwirkungen erfährt. Ein Körper ist träge. Es muss also eine Kraft aufgewendet werden, um eben diesen Körper von seiner Momentanen Geschwindigkeit $\vec{v}$ abzubringen. Dazu gehören Richtungs- und Schnelligkeitsänderungen.

lex secunda: Aktionsprinzip

Die Änderung der Geschwindigkeit mit welcher sich eine Masse bewegt, ist proportional zu der Kraft, der diese Masse angreift. Es gilt also:

$$F = ma = \dot{p}$$

lex tertia: Reaktionsprinzip

Kräfte treten immer paarweise auf. Wirkt eine Kraft vom Körper A auf B, so wirkt eine gleich grosse aber entgegen gerichtete Kraft von B auf A.

$$F_{A \to B} = -F_{B \to A}$$

2.1.2 Gleichmässig beschleunigte Bewegung

Eine der grundlegendsten Arten der Bewegung ist die gleichmässig beschleunigte Bewegung. Dabei ist die Beschleunigung $a_x(t) = konst.$, weshalb die Geschwindigkeitsänderung auch konstant ist. Die Geschwindigkeit ist daher gegeben durch:

$$v_x(t) = v_{x,0} + a_x t$$

Da die Geschwindigkeit die Änderung der Position ist, kann man durch integrieren der Geschwindigkeit zur Position kommen.

$$x(t) = \int v_x(t)dt = \int (v_{x,0} + a_x t)dt = x_0 + v_{x,0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Ausserdem kann man die mittlere Geschwindigkeit finden durch $\overline{v_x} = \frac{v_{x,0+v_x}}{2}$. Mit der verwendung dieser mittleren Geschwindigkeit $\overline{v_x}$, kann man $x(t)$ ohne $a_x(t)$, ähnlich wie bei unbeschleunigten Bewegungen wiefolgt ausdrücken:

$$x = x_0 + \frac{v_{x,0} + v_x}{2}t$$

Mit der Gleichung (2.1.2), lässt sich die Zeit als $t = \frac{v_x^2 - v_{x,0}^2}{a}$ beschrieben. Durch einsetzen dieses Terms in (2.1.2), ergibt sich folgender zeitunabhängiger Ausdruck für x:

$$x = x_0 + \frac{v_x^2 - v_{x,0}^2}{2a}$$

Freier Fall

Der freie Fall ist ein Beispiel einer gleichmässig beschleunigten Bewegung. Dabei ist die beschleunigung gleich dem Ortsfaktor, der Anfangswert für die Position ist die Fallhöhe und die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null.
Es gilt für die Höhe nach der Zeit wie bei (2.1.2) also:

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

2.1.3 Bewegung im Raum - schiefer Wurf

Es kann hilfreich sein Bewegungen im mehrdimensionalen Raum aufzuteilen und unabhängig von den jeweils anderen Dimensionen zu betrachten. Anhand des Schiefen Wurfs lässt sich dieses Konzept ideal erklären.
Ein scheifer Wurf kann man sich vorstellen wie ein Teilchen, welches mit einer Startgeschwindigkeit v_0 im Winkel α zum Boden weggeschossen wird. Dabei gilt:

$$v_{x,0} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{y,0} = v_0 \sin \alpha$$

Weiter gilt, dass nur eine Beschleunigung der Vertikalen vorhanden ist, weshalb die Geschwindigkeit über die Horizontale konstant ist.

$$v_x = v_{x,0} = konst.$$

$$a_y = -g = konst.$$

Mit $x_0 = 0$ gilt dann:

$$x(t) = v_x t \Rightarrow t = \frac{x}{v_x}$$

Für gleichmässig beschleunigte Bewegungen, gilt weiterhin 2.1.2. Mit $t = \frac{x}{v_x}$ gilt für die Höhe y folgendes:

$$y(t) = y_0 + x \tan\alpha - \frac{gx^2}{\cos^2(\alpha) v_0^2}$$

Durch ableiten und gleich null setzen erhält man

$$x = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Dieses x beschreibt die horizontale Position, an der das Geschoss den höchsten Punkt erreicht. Die maximale Höhe ergibt sich also, durch Einsetzen von x in die Gleichung 2.1.3.

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Weiter kann man für $y_0 = 0$[1] die Wurfweite bestimmen, wobei die trigonometrische Eigenschaft $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ zum Zug kommt. Dafür setzt man $y = 0$[2] und erhält folgendes:

$$x_w = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

2.1.4 Gleichförmige Kreisbewegung

Kreisbewegungen gehören zu den einfachsten Bewegungen im zweidimensionalen Raum. Eine Bewegung eines Teilchens ist dann eine gleichförmige Kreisbewegung,

[1] Mit $y_0 \neq 0$, könnte man das x für $y = y_0$ berechnen und die Zeit, für die Höhe y_0 berechnen und diese mit v_x multipliziert dazu addieren.

[2] Wegen der Parabelform des Wurfes könnte man auch das x beim höchsten Punkt mit zwei multiplizieren.

wenn Winkel- beziehungsweise Bahngeschwindigkeit und der Radius konstant bleiben. Die Position des Teilchen lässt sich dann durch einen Winkel $\varphi(t)$ beschreiben, wobei die Änderung dieses Winkels gleich der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$[3] ist und daher der Winkel zur Zeit t gegeben ist durch $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$. In kartesischen Koordinaten liesse sich die Position angeben durch:

$$x(t) = r\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$y(t) = r\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Die Geschwindigkeiten im Kartesischen ergeben sich durch Ableiten.

$$v_x = \dot{x}(t) = -r\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$v_y = \dot{y}(t) = r\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Weiter ist die Bahngeschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ gegeben durch

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega$$

Die vorherigen Gleichungen haben gezeigt, dass der Betrag der Geschwindigkeit zwar konstant bleibt, jedoch die Richtung nicht, es handelt sich also um eine beschleunigte Bewegung. Durch erneutes ableiten ergibt sich die Beschleunigungen.

$$a_x = \ddot{x}(t) = -r\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$a_y = \ddot{y}(t) = -r\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Wieder ist der Betrag gegeben durch[4]

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

[3]Die Periode T ist dabei die Zeit die Gebraucht wird für eine Umrundung. Es gilt $T = f^{-1}$

[4]Die letzte Umformung gilt, da $v = r\omega$ beziehungsweise $\omega = \frac{v}{r}$

Es lässt sich zeigen, dass der Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor normal zueinander sind mit $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$. Da mit der gleichen Begründung auch klar ist, dass $\vec{r}$, also der Positionsvektor normal zum Geschwindigkeitsvektor ist, ist (im zweidimensionalen) die Position parallel zur Beschleunigung. Weiter lässt sich mit $\vec{r} \cdot \vec{a} < 0$ zeigen, dass die Vektoren in entgegengesetzte Richtungen zeigen.[5]

2.1.5 Energie

Energie ist gespeicherte Arbeit. Anders ausgedrückt ist Energie die Möglichkeit Arbeit zu verrichten. Energie ist in abgeschlossenen Systemen eine Erhaltungsgrösse. Das bedeutet Energie kann weder zerstört noch erstellt werden. Einzig eine Umwandlung von einer Energieform in eine Andere ist möglich. Dabei unterscheidet man drei verschiedene Arten von Systemen.

- Ein **offenes System** ist ein System, dass den Austausch von Energie sowie Materie mit anderen Systemen erlaubt.

- Ein **geschlossenes System** ist ein System, das zwar keinen Materie Austausch erlaubt, Energie jedoch über die Systemgrenzen gelangen kann.

- Zu guter letzt gibt es noch **abgeschlossene oder isolierte Systeme**, bei denen weder Materie noch Energie die Systemgrenzen überqueren können.

Während die Energie in offenen und geschlossenen Systemen nicht erhalten bleibt, beschreibt das Universum ein abgeschlossenes System. Das bedeutet, Energie bleibt im ganzen erhalten.
Energetik ist ein in der Schule ausgiebig besprochenes Thema. Ich werde im folgenden also nur kurz auf eine Auswahl der häufigsten Energieformen[6] eingehen.

[5] Es gilt $\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

[6] Es gibt eine unglaublich grosse Anzahl von Energietypen. Darum ist auch die Beschreibung der Energieerhaltung, wenn wirklich alle Energietypen betrachtet werden ziemlich umständlich.

Potentielle Energie

Eine potentielle Energie tritt dann auf, wenn zwischen zwei Körpern eine Kraft wirkt. Um die potentielle Energie allgemein zu beschrieben, ist ein Referenzpunkt $\vec{r}_0$ nötig, an dem die potentielle Energie per Definition null ist. Die potentielle Energie an einem Punkt $\vec{r}$ ist dann gegebn durch die Arbeit die nötig wäre, um den Körper von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ zu verschieben.

$$E_{pot}(\vec{r}) = W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Wobei beachtet wird, dass eine äussere Kraft $\vec{F}_e = -\vec{F}$ nötig wäre. Die häufigste Anwendung der potentiellen Energie in Physik Problemen ist die potentielle Energie eines Körpers der Masse m, die im Gravitationsfeld der Erde auf einer Höhe h ist. Die Energie ist dann gegeben durch:

$$E_{pot} = mgh$$

Eine andere Anwendung der potentiellen Energie ist die Spannenergie. Also zum Beispiel die Energie, wenn eine Feder angespannt ist. Die potentielle Spannenergie ist dann gegeben durch:

$$E_{spann} = \frac{1}{2}Dy^2$$

Wobei D die Federkonstante und y die Ausdehnung ist.

Kinetische Energie

Wenn ein Ball fallen gelassen wird, so wird er wieder nach oben Springen. De Facto muss also neben der potentiellen Energie, eine Energie beteiligt sein, die dazu führt, dass der Ball wieder nach oben fliegt. Diese Energie ist die kinetische Energie (Bewegungsenergie). Um diese kinetische Energie zu berechnen, brauchen wir die

Energieerhaltung. Konkret muss die verlorene potentielle Energie vollständig in kinetische Energie umgewandelt werden. Wenn der Ball für eine Zeit t fällt[7], wird eine Distanz $h = \frac{1}{2}gt^2$ passiert und der Ball verliert die Energie mgh. Die gleiche Energie muss nun in kinetischer Energie vorliegen. Mit $gt = v$ erhalten wir folgendes:

$$E_{kin} = mgh = \frac{1}{2}mg^2t^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Rotationsenergie

Die Rotationsenergie ist eine nächste Energieform. Man stelle sich dafür ein rotierender Körper vor, den man sich als mehrere kleine Körper vorstellen kann. Dabei haben all diese kleineren Körper eine kinetische Energie:

$$E_{rot} = \sum_i E_{kin,i} = \sum_i \frac{1}{2}v_i^2 m_i = \omega^2 \sum_i \frac{1}{2}r_i^2 m_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 I$$

Dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Rotierenden Körpers, welche trivialerweise für den gesamten Körper gleich ist. I ist das Trägheitsmoment, das im nächsten Kapitel genauer behandelt wird.

2.1.6 Impuls und Stösse

Ähnlich wie Energie ist auch der Impuls, welcher gegeben ist durch:

$$\vec{p} = \vec{v}m$$

beziehungsweise

$$p = vm$$

in einem jeden abgeschlossenen System, eine Erhaltungsgrösse. Diese Impulserhaltung kann mit dem ersten und zweiten Newtonschen Axiom vollständig erklärt

[7] Hier gilt, dass v_0=0

werden. Dabei lautet das zweite Newtonsche Axiom bekanntlich:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{p}}$$

Diese Schreibweise ist ungewohnt, bedeutet aber nichts anderes, als dass die zeitliche Änderung[8] des Impulses p eines Körpers, gleich der Kraft auf diesen Körper ist. Weiter machen wir uns das dritte Newtonsche Axiom zu nutze, welches besagt, dass Kräfte paarweise auftreten und jeweils gleich gross aber anders gerichtet sind. Anders ausgedrückt gilt, dass wenn keine äussere Kraft einwirkt, dass die resultierende Kraft null ist. Gleichermassen bedeutet das, dass die Änderung des Impulses null ist. Also gilt:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{p}} = \vec{0}$$

Oder in Worten ausgedrückt: In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls erhalten. Das bedeutet auch, dass sich der Masseschwerpunkt mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Vollkommen elastischer Stoss

Die vorhin erklärte Impulserhaltung kann weiter auf bestimmte Probleme angewendet werden. Hilfreich zeigt sich die Impulserhaltung vor allem bei Stössen. Zu beginn wollen wir uns erst mal den elastischen[9] Stössen widmen. Dafür betrachten wir eine Masse m_a, die mit der anfänglichen Geschwindigkeit $v_{a,1}$ gegen die Masse m_b mit der Geschwindigkeit $v_{b,1}$ stösst. Dabei gilt $\vec{v}_{a,1} = r\vec{v}_{b,1}$ mit $r \in \mathbb{R}$. Wir wissen, dass nach dem Stoss die Summe der Kinetischen Energien und die Summe der Impulse

[8] Der Punkt beschreibt nichts anderes als die Ableitung nach der Zeit $\frac{d}{dt}$.

[9] reibungsfrei und nicht klebend; ohne Energieverluste und ohne Kontakt nach dem Stoss.

jeweils gleich ist wie die jeweiligen Summen vor dem Stoss.

$$E_1 = E_2$$

$$p_1 = p_2$$

Beziehungsweise ausformuliert:

$$\frac{1}{2}m_a v_{a,1}^2 + \frac{1}{2}m_b v_{b,1}^2 = \frac{1}{2}m_a v_{a,2}^2 + \frac{1}{2}m_b v_{b,2}^2$$

$$m_a v_{a,1} + m_b v_{b,1} = m_a v_{a,2} + m_b v_{b,2}$$

Weiter wird die Gleichung der Energieerhaltung, unter Zuhilfenahme der dritten binomischen Formel folgendermassen umgeformt:

$$m_a(v_{a,1} - v_{a,2})(v_{a,1} + v_{a,2}) = m_b(v_{b,2} - v_{b1})(v_{b,2} + v_{b,1})$$

Ausserdem wird die Gleichung zum Impulserhalt umgeformt.

$$m_a(v_{a,1} - v_{a,2}) = m_b(v_{b,2} - v_{b,1})$$

Wenn jetzt weiter die Gleichung 2.1.6 durch die Gleichung 2.1.6 geteilt wird, erhält man folgenden Ausdruck[10]:

$$v_{b,2} = v_{a,1} + v_{a,2} - v_{b,1}$$

Wenn nun dieser Ausdruck für $v_{b,2}$ in Gleichung 2.1.6 ersetzt wird, erhält man nach Umformungen folgende Gleichung:

$$v_{a,2} = \frac{(m_a - m_b)v_{a,1} + 2m_b v_{b,1}}{m_a + m_b}$$

[10]Dieser Ausdruck besagt auch, dass die Geschwindigkeitsdifferenzen gleich gross sind($\Delta v_1 = \Delta v_2$)

Das die Gleiche Bedingungen auch mit Vektoren funktioniert, lässt sich mit einer Individuellen Betrachtung der Geschwindigkeitskomponenten erklären[11].

$$\vec{v}_{a,2} = \frac{(m_a - m_b)\vec{v}_{a,1} + 2m_b\vec{v}_{b,1}}{m_a + m_b}$$

Um $v_{b,2}$ zu bestimmen kann man gleich vorgehen, wobei dann $v_{a,2}$ in 2.1.6 ersetzt wird.

$$\vec{v}_{b,2} = \frac{(m_b - m_a)\vec{v}_{b,1} + 2m_a\vec{v}_{a,1}}{m_b + m_a}$$

Vollkommen inelastischer Stoss

Ein inelastischer Stoss ist ein Stoss, bei dem die beiden Massen m_a und m_b nach dem Stoss aneinander kleben. Somit haben die beiden Körper nach dem Stoss auch die gleiche Geschwindigkeit. Somit lässt sich die Gleichung für die Impulserhaltung 2.1.6 folgendermassen umschreiben:

$$m_a v_{a,1} + m_b v_{b,1} = v_2(m_a + m_b)$$

Weiter lässt sich diese Gleichung nach der Geschwindigkeit v_2 umformen:

$$v_2 = v_{a,2} = v_{b,2} = \frac{m_a v_{a,1} + m_b v_{b,1}}{m_a + m_b}$$

Da im Fall eines vollkommen inelastischen Stosses nur die Impulserhaltung nicht aber die Energieerhaltung beachtet wird, muss man in Betracht ziehen, dass man einen Energieverlust hatte, also dass $\Delta E = E_2 - E_1 < 0$. Um diese Differenz zu bestimmen, formt man die Energieerhaltungsgleichung um. Man erhält folgenden

[11] Man beachte wie sich nur die Geschwindigkeit in x-Richtung verändert. Anschliessend betrachtet man die anderen Komponenten.

Term:

$$\Delta E = -\frac{m_a m_b (v_{a,1} - v_{b,1})^2}{2(m_a + m_b)}$$

Wenn man diesen Term genauer betrachtet fällt auf, dass ein inelastischer Stoss immer auch ein Energieverlust mit sich trägt[12].

2.1.7 Gravitation

Es gibt in der Physik vier[13] fundamentale Kräfte oder Arten von Wechselwirkungen. Die elektromagnetische Kraft, die starke Kraft, die schwache Kraft sowie die Gravitationskraft. Das die Gravitationskraft eine Grundlegende Kraft ist bedeutet auch, dass sie nicht erklärt werden kann. Wir müssen mehr oder weniger die Gesetzmässigkeit hinnehmen und lernen die Kraft beschreiben zu können.
Die Gravitationskraft beschreibt die Tatsache, dass sich Massen gegenseitig anziehen. Dabei geht diese Anziehungskraft unendlich weit, schwacht aber über die Distanz zum Quadrat ab. Die Kraft wirkt zwischen zwei Körper, ist bei beiden Körpern gleich gross und zeigt vom einen Körper auf den jeweils anderen.

$$\vec{F}_{G,1\to2} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r}$$

und

$$\vec{F}_{G,1\to2} = -\vec{F}_{G,2\to1}$$

Dabei ist G die experimentell bestimmte Gravitationskonstante[14]. Es hilft wenn man die beiden Körper als Punktmassen approximieren kann. Falls das nicht geht müsste

[12] Falls $v_{a,1} = v_{b,1}$ stossen die beiden Körper nicht zusammen. Dann lässt sich auch nicht von einem vollkommen inelastischem Stoss sprechen.

[13] Genau genommen sind es eher nur drei, da die elektromagnetische Kraft und die schwache Kraft die gleiche Ursache haben. Diese Kraft trägt den ausserordentlich kreativen Namen "elektroschwache Kraft".

[14] $G = 6.674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$

man die Gravitationskraft aufteilen, wobei die gesamte Gravitationskraft die Summe aller Teilkräfte ist.

Gravitationsfeld

Das Gravitationsfeld eines Körpers der Masse m_1 ist definiert als

$$\vec{g}(r) = \frac{\vec{F}_{G,1\to 2}}{m_2} = G\frac{m_1}{r^2}\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r}$$

Anders gesagt erfährt eine Masse m_2 wenn es eine Entfernung r von der Masse m_1 hat die Kraft

$$\vec{F}_G = m_2\vec{g}(r)$$

Weiter betrachten wir Gravitationsfelder von nicht-punktähnliche Massen. Dabei sei angemerkt, dass meine Analysis Kenntnisse nicht ausreichen um die folgenden Gesetzte herzuleiten, weshalb hier nur die Tatsachen präsentiert und kommentiert werden.

Das Gravitationsfeld innerhalb einer Kugel mit homogener Dichte, der Masse M ist gegeben durch:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{R^3}r^3\frac{\vec{r}}{r}$$

Dabei ist $\vec{r}$ die Position der Probemasse, wenn der Mittelpunkt der Kugel im Ursprung ist. Für r gilt per Definition $0 < r < R$.
Ausserhalb der Kugel verhält sich das Gravitationsfeld, als wäre die Kugel selbst

eine Punktmasse an ihrem Zentrum[15].

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Hier gilt für r trivialerweise $r > R$.

Energie und Arbeit

Die potentielle Energie einer kleiner Masse m im Gravitationsfeld von M ist gegeben durch

$$E_{pot} = mg(r)r = -G\frac{Mm}{r}$$

Im Nahfeld der Erde wird das Gravitationsfeld als konstant angenommen[16]. Die Arbeit die nötig ist um die Masse m von r' nach r zu verschieben ist gegeben durch:

$$W = \Delta E_{pot} = -G\frac{Mm}{r} + G\frac{Mm}{r'} = GmM\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$$

Man kann sich wegen $\lim_{r'\to\infty}\frac{1}{r'} = 0$ die potentielle Energie vorstellen, als die Arbeit verrichtet wird um ein Körper der Masse m vom unendlichen bis nach r zu ziehen.

2.1.8 Keplers Gesetzte

Für die Bewegung der Planetenbewegung hat Kepler drei grundlegende Gesetze aufgestellt[17]. Im folgenden werde ich versuchen diese drei Gesetze herzuleiten oder zu erklären.

[15]Diese Tatsache ist zumindest für mich alles andere als intuitiv. Die Mathematik würde eine Erklärung liefern.

[16]Dann gilt $E_{pot} = mgh$ mit $g = -9.81\frac{m}{s^2}$

[17]De facto hat Kepler diese Gesetze nur anhand der bestehenden Daten “gesehen” und formuliert.

1. Kepler'sches Gesetz

Das erste Gesetz Keplers besagt, dass sich alle Planeten auf einer Ellipse bewegen, wobei die Sonne bei allen Ellipsen einer der beiden Brennpunkte ist. Da es nicht wirklich einen Weg gibt um diese Tatsache herzuleiten, werde ich Ellipsen im folgenden genauer erklären. Es gibt verschiedene äquivalente Definitionen einer Ellipse. Die für mich am hilfreichsten sind die folgenden zwei.

- Eine Ellipse ist ein Einheitskreis, wobei dieser Kreis in x-Richtung um den Faktor a und in y-Richtung um Faktor b gestreckt wurde. $2a$ und $2b$ werden Hauptachsen genannt.

- Es gibt zwei sogenannte Brennpunkte. Eine Ellipse ist die Punktmenge, die als Elemente alle Punkte hat, wobei für all diese Punkte gilt, dass die Summe der Distanzen zwischen diesem Punkt und den beiden Brennpunkten gleich ist.

Aus beiden Definitionen folgt folgende mathematische Beschreibung einer Ellipse[18]:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Das gleiche Konzept könnte man auch im Polar Koordinatensystem anwenden. Um unnötigen Syntax und Verwirrung zu vermeiden werde ich aber nicht näher darauf eingehen.

2. Kepler'sches Gesetz

Für die Herleitung des 2. Kepler'schen Gesetzes ein wenig Vorwissen vom Mechanik zwei von Nöten. Genauer gesagt, ist das 2. Gesetz eine direkte Folge des Drehimpuls Erhaltungssatz der besagt, dass $\omega r^2 = konts$. Weiter kann die Position eines Planeten beschrieben werden durch folgenden Vektor, wobei die Sonne im Ursprung ist.

$$\vec{r} = r(\varphi)\cos(\varphi)\hat{x} + r(\varphi)\sin(\varphi)\hat{y}$$

[18]Zur Erinnerung: Ein Kreis mit Mittelpunkt am Ursprung ist definiert als $x^2 + y^2 = r^2$.

Wobei $r(\varphi)$ der Abstand vom Ursprung zum Punkt auf der Ellipse ist. Ausserdem beschreibt $\hat{x}$ und $\hat{y}$ nicht eine Amplitude, sondern den jeweiligen Einheitsvektor[19]. Weiter ist die Geschwindigkeit gegeben durch die Ableitung von $\vec{r}$. Um Platz zu sparen und die Leserlichkeit zu steigern, wird die Funktion $r(\varphi) = r$ gesetzt.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\varphi}\left((\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi)\hat{x} + (\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi)\hat{y}\right)$$

Weiter findet man den Drehimpuls mit

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = r^2\dot{\varphi}\hat{z}$$

Man stelle sich die Fläche dA vor, die die Ortsvektoren des Planeten während der Zeit dt überdeckt. Diese Fläche lässt approximieren durch

$$dA = \frac{1}{2}r \cdot r d\varphi = \frac{1}{2}r^2\omega dt$$

Wobei gilt $d\varphi = \omega dt$ beziehungsweise $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$. Mit der koversation des Drehimpuls $\omega r^2 = konts.$, ist klar, dass dA nur von dt abhängt und somit unabhängig vom Radius ist. Ausserdem kann man die Fläche die während Δt abgedeckt wird folgendermassen berechnen:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}\omega r^2(t) dt = \frac{L}{2m}\int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{L}{2m}\Delta t$$

Zusammengefasst besagt das zweite Kepler'sche Gesetz, dass während einer Zeit Δt immer die gleiche Fläche abgedeckt wird, egal wo sich der Planet befindet. Ausserdem ist es nicht relevant, welche Zeitdifferenz Δt genommen wird[20].

---

[19] $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

[20] Es erscheint nicht ganz intuitiv, dass Planeten am Aphel (fernster Punkt auf der Bahn) und Perihel (nächster Punkt auf der Bahn) die gleiche Fläche abdecken. Bei näherem betrachten macht es trotzdem Sinn, dass Planeten die weiter weg sind, auch langsamer sind.

3. Kepler'sches Gesetz

Man nehme an ein Planet der Masse m bewege sich Kreisförmig mit dem konstanten Abstand r um die Sonne mit Masse M und braucht für eine ganze Umdrehung die Zeit T. Die Zentripetalkraft muss gleich der Gravitationskraft sein.

$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = G\frac{mM}{r^2}$$

oder die dazu äquivalente Schreibweise

$$\frac{r^3}{T^2} = G\frac{M}{4\pi^2}$$

In Worten gilt also, dass es einen Zusammenhang zwischen Radius und Umlaufzeit gibt. Das gleiche Gesetz gilt auch für Planetenbahnen elliptischer Form, wobei die Herleitung da zu kompliziert wäre.

2.2 Mechanik II

Das Gebiet der Mechanik II, führt die Mechanik I weiter. Dabei werden neue Themen und Sichtweisen aufgegriffen. Im folgenden werden vor allem Rotationen betrachtet. Weiter ergeben sich dabei auch Sichtweisen, welche sogennante Scheinkräfte, wie Zentrifugal- oder Curioliskraft erklären.

2.2.1 Physik der starren Körper

Rigid bodies oder zu deutsch starre Körper, ist ein grundlegendes Konzept, wenn man Rotationen diskutiert. Es handelt sich dabei um eine vitale Approximation, die jegliche Berechnungen deutlich vereinfacht. Starre Körper behalten ihre Form. Auch bleibt die Dichte in einem jeden Bereich im Körper konstant. Im folgenden werden starre Körper genauer definiert und einige Anwendungen, wie das Massenzentrum oder Trägheitsmoment werden eingeführt.

Definition starrer Körper

Ein starrer Körper besteht aus endlich vielen Punktförmigen Teilchen, wobei die Abstände zwischen zwei solcher Teilchen konstant bleibt. Das bedeutet auch, dass sogar beim eiwirken externer Kräfte die Form und Massenverteilung erhalten bleibt. Es sei erneut angemerkt, dass es sich hierbei nur um eine Approximation handelt. Ein gutes Beispiel für die Verwendung dieser Approximation ist ein Fussball. Für die Berechnung der Trajektorie bleibt die Form des Balles annähernd erhalten. Der Ball kann also als starrer Körper angenommen werden. Anders ist es, wenn der Ball auf den Boden aufprallt oder er gekickt wird. Dann wird der Körper stark verformt und eine Approximation als starrer Körper wäre ungenügend.
De facto kann ein starrer Körper mit nur drei Teilchen vollständig beschrieben werden[21]. Falls die Vereinfachung als starrer Körper nicht gemacht wurde, müsste man mit Teilchen anzahlen der Grössenordnung 10^{23} rechnen, was verständlicherweise unangenehm ist.

2.2.2 Schwerpunkte

Der Begriff vom Schwerpunkt gehört zum Alltag. Beim balancieren eines Balles, Slacklines oder bei älteren Waagen. Der Schwerpunkt ist der mit der Masse gewichtete Mittelpunkt des Körpers[22]. Formaler ausgedruckt lässt sich der Schwerpunkt bestimmen durch:

$$\vec{R}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Dabei ist m_i die kleine Masse, beispielsweise ein Molekül, das am Punkt bei $\vec{r}_i$ gefunden werden kann. Möglicherweise hilft es, sich die Ähnlichkeit zum Hebelgesetz ("Last mal Lastarm ist gleich Kraft mal Kraftarm") vor Augen zu führen.
Wenn man einen Körper als starr approximieren kann, lässt sich die Masse eins

[21] In der Praxis wird meistens ein Punkt und die Orientation des Körpers gegeben.
[22] Dabei muss der Schwerpunkt nicht immer im Körper sein. Siehe nicht konvexer Körper.

Stück an der Position $\vec{r}$ mit dem Volumen $dV(\vec{r})$ folgendermassen beschreiben:

$$dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV(\vec{r})$$

Folglich lässt sich der Schwerpunkt folgendermassen definieren:

$$\vec{R}_C = \frac{\int \vec{r}\rho(\vec{r})dV(\vec{r})}{\int \rho(\vec{r})dV(\vec{r})}$$

Berechnungen für die Findung des Schwerpunktes können schnell ziemlich kompliziert werden. Vor allem bei unsymmetrischen oder nicht-homogenen Körpern kann das Rechnen ein mühseliges unterfangen sein. Solche Rechnungen werden nicht nötig sein.

2.3 Thermodynamik

Die Thermodynamik (oder auch Wärmelehre) als eines der grösseren Gebiete der klassischen Physik befasst sich mit Teilchen auf makroskopischer Ebene. Die Thermodynamik ermöglicht es, solche System zu vereinfachen. Beispielsweise werden nicht mehr einzelne Teilchen und deren Verhalten betrachtet, sondern durchschnittliche, oder mittlere Verhaltensweisen, wobei diese Vereinfachung eine Beschreibung des Systems erst möglich macht.

2.3.1 Temperatur und Temperaturskalen

Die Temperatur gilt als grundlegende Grösse in der Thermodynamik. Sie ist ein Mass für die Brown'sche Teilchenbewegung beziehungsweise für die mittlere Kinetische Energie der Teilchen. Je wärmer ein System ist, desto schneller bewegen sich die Teilchen. Im folgenden werden die drei am weitest verbreiteten Temperaturskalen verglichen.

Celsius

Die Celsius Temperaturskala ist wahrscheinlich die am weiten verbreitetste. Sie orientiert sich am Gefrier- und Siedepunkt von Wasser. Dabei ist der Gefrierpunkt als $T_G[°C] = 0°C$ definiert und der Siedepunkt als $T_S[°C] = 100°C$.

Fahreinheit

Die zweite Temperaturskala die durchaus zum Zug kommt ist die Fahreinheit-Skala (unter anderem in der USA). Diese ist etwas altmodischer und hat die Körpertemperatur und die damals als absoluter Nullpunkt angenommene Temperatur als Orientierung. Dabei ist der "Nullpunkt"definiert als $T_0[°F] = 0°F$ und die Körpertemperatur des Menschen wurde als $T_K[°F] = 100°F$ fixiert.

Kelvin

Die Kelvin Skala ist Grundsätzlich eine Mischung aus den Ideen von Celsius und Fahreinheit. Dabei gilt der absolute Nullpunkt hier als $T_0[K] = 0K$ die Schrittweite ist dabei die gleiche wie bei Celsius. Es gilt $T[K] - 273.15 = T[°C]$. Die Tatsache, dass keine negativen Temperaturen bei Kelvin möglich sind macht es ideal um Proportionalitäten auszudrücken, weshalb sich die Skala auch in der Wissenschaft durchgesetzt hat. Aufgrund der hohen Werte ist sie aber nicht wirklich alltagstauglich.[23]

2.3.2 Längen- und Volumenausdehnung

Die Längenausdehnung bei Festkörpern ist ein Phänomen, das auftritt, wenn die Temperatur des jeweiligen Körpers ansteigt beziehungsweise abfällt. Wenn man einen Stab der Länge l_0 mit der Temperatur T_0 hat, so hat dieser eine andere Länge $l = l_0 + \Delta l$, wenn sich seine Temperatur ändert, so das gilt: $T = T_0 + \Delta T$. Die Längenausdehnung Δl ist proportional zur Anfangslänge l_0 und zur Temperaturdifferenz

[23] Falls im Wissenschaftlichen Kontext von Temperatur gesprochen wird kann, wenn keine anderen Angaben vorhanden sind, von Kelvin als verwendete Skala ausgegangen werden.

ΔT. Mit dem Längenausdehnungskoeffizient α ergibt sich folgender Ausdruck für die Längenausdehnung:

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T$$

Der Längenausdehnungskoeffizient α ist abhängig vom Material des Stabes. Er hat die Einheit $[\alpha] = \frac{1}{K}$.
Parallel zur Längenausdehnung ist die Volumenausdehnung proportional zur Temperaturdifferenz ΔT und zum Anfangsvolumen V_0. Wieder lässt sich ein Materialspezifischer Volumenausdehnungskoeffizient γ mit $[\gamma] = \frac{1}{K}$ experimentell ermitteln. Damit ist die Volumenausdehnung[24]:

$$\Delta V = 3\alpha V_0 \Delta T = \gamma V_0 \Delta T$$

Anomalie von Wasser

Durch erhitzen wird der Benötigte Platz grösser beziehungsweise die Dichte des Körpers kleiner. Das ist mit Ausnahme von Wasser richtig. Bei Wasser bilden sich zwischen den Molekülen, wenn diese angeordnet sind, Wasserstoffbrücken, die Hohlräume entstehen lassen. Je wärmer das Wasser/Eis wird, desto weniger ordentlich ist die Anordnung und Wasserstoffbrücken lösen sich. Das hat zur Folge, dass die Dichte von Wasser steigt. Bei weiterem ansteigen der Temperatur, wird die Kinetische Energie der einzelnen Moleküle wieder grösser und sie brauchen somit mehr Raum. Die höchste Dichte erreicht Wasser bei $4°C$. Ausserdem ist Wasser das einzige Element, das bei festem Aggregatzustand eine tiefere Dichte hat, als bei flüssigem Aggregatzustand.

[24] Man stelle sich einen Würfel vor. Die Längenausdehnung bei einer Temperaturänderung ist in jeder Dimension gleich. Für den Volumenausdehnungskoeffizienten gilt also, $\gamma = 3\alpha$.

2.3.3 Ideale Gase

Ein ideales Gas gilt als eine Vereinfachung von echten Gasen. Dabei werden bei idealen Gasen zwischenmolekulare Wechselwirkungen vernachlässigt. Zudem wird davon ausgegangen, dass alle Stösse rein elastisch sind beziehungsweise, dass die Gasteilchen an sich kein Volumen einnehmen. Ausserdem wird die Kinetische Energie als rein translativ angenommen. Rotationen und Vibrationen werden demnach vernachlässigt und die Anzahl Freiheitsgrade pro Teilchen beschränkt sich auf drei.

Gasgesetze

Alle der Folgenden drei Gesetze gelten nur für ideale Gase.

- Gesetz von Amontons: Bei konstantem Volumen sind Druck und Temperatur in einem **geschlossenen** System proportional zueinander. Es gilt: $\frac{p}{T} = konst.$
- Gestz von Boyle und Mariotte: Bei konstanter Temperatur sind Druck und Volumen in einem **abgeschlossenem** System antiproportional zueinander. Es gilt: $pV = konst.$
- Gesetz von Gay-Lussac: Bei konstantem Druck sind Temperatur und Volumen in einem **geschlossenem** System proportional zueinander. Es gilt: $\frac{V}{T} = konst.$

Die drei Gasgesetze lassen sich als $\frac{pV}{T} = konst.$ zusammenfassen.

Zustandsgleichung idealer Gase

Die womöglich wichtigste Gleichung aus der Thermodynamik ist die Zustandsgleichung der idealen Gase. Sie ergibt sich aus den oben erwähnten Gasgesetzen und einem Gedankenexperiment[25], bei dem klar wird, dass wenn $\frac{pV}{T} = konst.$ gilt, auch $\frac{pV}{TN} = konst.$ gelten muss, wobei N die Teilchenanzahl ist. Durch experimentelles

[25]Man stelle sich ein geschlossenes System vor, wobei $\frac{pV_1}{T} = A$ ist. Würde man ein zwei solcher geschlossenen Systeme zusammenfassen, würde gelten $\frac{pV_2}{T} = \frac{2pV_1}{T} = 2A$. Da der Druck und die Temperatur in diesem Gedankenexperiment konstant sind, muss $\frac{pV_1}{T} \propto N$ gelten.

Ermitteln dieser Konstanten ergibt sich:

$$\frac{pV}{NT} = k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

beziehungsweise die Zustandsgleichung idealer Gase:

$$pV = Nk_BT$$

Wobei k_B die Boltzmann Konstante ist. Weiter kann der gleiche Ausdruck auch für die Stoffmenge $n = \frac{N}{N_A}$ umgeformt werden.[26].

$$pV = nRT$$

Wobei $R = k_B N_A = 8.314 \frac{J}{molK}$ ist und Universelle Gaskonstante genannt wird.

2.3.4 Kinetische Gastheorie

Die Kinetische Energie einzelner Teichen und somit deren Geschwindigkeiten zum Quadrat ist direkt mit der Temperatur verbunden. Das sagt zumindest die Kinetische Gastheorie, die im folgenden Hergeleitet und genauer erklärt wird. Dafür betrachten wir den in Abbildung 2.1 dargestellten Würfel mit Volumen $V = L^3$. Darin befinden sich zahlreiche Teilchen, die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen. Wenn ein solches Teilchen eine Wand trifft, und diese Stoss vollkommen elastisch ist, gibt es eine Beschleunigung auf ein Teilchen, das sich wie folgt beschreiben lässt.

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{2v_x}{\Delta t}$$

Weiter weiss man, dass ein Teilchen mit der Geschwindigkeitskomponente v_x eine gegebene Wand immer periodisch nach $\Delta t = \frac{2L}{v_x}$ trifft. Für ein einzelnes Teilchen gilt

[26]Die Stoffmenge gibt die Menge der Teilchen in Mol an, wobei ein Mol $6.022 \cdot 10^{23}$ ist. Somit ist die sogenannte Avogadro-Konstante $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$

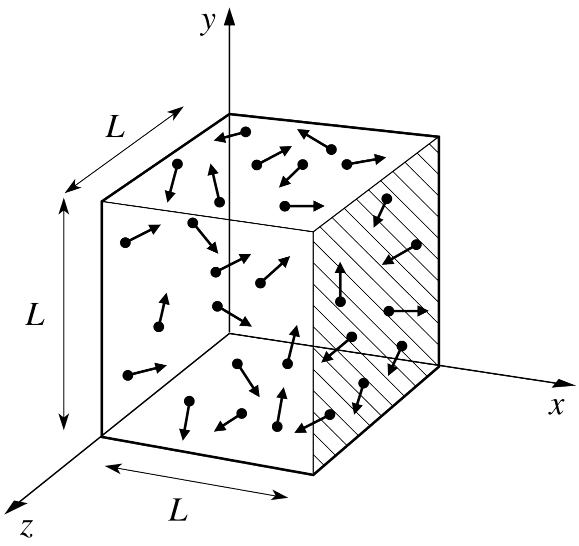


Abbildung 2.1:

also[27]:

$$F_p = m_p a_x = m_p \frac{v_x^2}{L}$$

Für N Teilchen gilt dann:

$$F = N \cdot F_p = N m_p \frac{\overline{v}_x^2}{L}$$

Dabei ist $\overline{v}_x$ die mittlere Geschwindigkeitskomponente für x. Da keine einschränkende Annahmen über die Geschwindigkeiten getan wurden, sind die mittleren Werte der anderen Komponenten gleich anders gesagt gilt:

$$\overline{v}^2 = \overline{v}_x^2 + \overline{v}_y^2 + \overline{z}_x^2 = 3\overline{v}_x^2$$

Weiter kann man mit $\overline{v}_x^2 = \frac{\overline{v}^2}{3}$ den Druck berechnen.

$$p = \frac{F}{L^2} = \frac{N m_p \overline{v}^2}{3V}$$

[27]Der Index p steht für "particle". Die Masse m_p ist dementsprechend die Masse eines einzelnen Teilchens. Das gleiche gilt für die Kraft F_p

Ein Vergleich mit der Zustandsgleichung idealer Gase liegt nahe.

$$pV = \frac{Nm_p\overline{v}^2}{3} = Nk_BT$$

Eine letzte Umformung ergibt:

$$\frac{1}{2}m_p\overline{v}^2 = \frac{3}{2}k_BT$$

Damit ist gezeigt, dass die Temperatur mit der kinetischen Energie zusammenhängt.

2.3.5 Wärme und erster Hauptsatz

Wärme ist eine Form von Energie, wobei sie ähnlich wie Arbeit eine Prozessgrösse darstellt.

nullter Hauptsatz

Der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass wenn zwei Systeme mit unterschiedlichen Temperaturen T_A und T_B in Kontakt gebracht werden, wird sich eine Gleichgewichtstemperatur einstellen, wobei diese Gleichgewichtstemperatur zwischen T_A und T_B ist. Es fliesst Wärme vom System mit der höheren Temperatur zum System mit der tieferen.

Innere Energie und erster Hauptsatz

Im Abschnitt der kinetischen Gastheorie 2.3.4 wird klar das ein System mit einer Temperatur auch immer eine Energie hat. Diese Energie ist die innere Energie U. Die innere Energie ist eine Funktion der Parameter des Systems[28]. Eine Änderung der inneren Energie hängt nur von der anfänglichen Energie und der am Ende ab ($\Delta U = U_E - U_A$). Es ist also auch unwichtig, wie man von einem Zustand zum anderen kommt.

[28] Diese Parameter sind Druck p, Volumen V und Temperatur T.

Der erste Thermodynamische Hauptsatz besagt, dass sich die innere Energie nur ändert wenn Arbeit am/vom System verrichtet wird oder Wärme vom/zum System fliesst.

$$\Delta U = Q + W$$

Hier gilt, dass am System verrichtete Arbeit positiv und vom System verrichtete Arbeit negativ ist ($W = W_{zu} - W_{ab}$). Das gleiche gilt für die Wärme ($Q = Q_{zu} - Q_{ab}$)

2.3.6 Wärmetransport

Wenn zwei Systeme mit verschiedenen Temperaturen in Kontakt treten, werden diese, wie es auch der nullte Hauptsatz2.3.5 besagt, thermisch angeglichen. Unter mikroskopischer Betrachtung kann man sich das als Stösse von Teilchen vorstellen, wobei sich eine mittlere Geschwindigkeit einstellt. Dann sind die Systeme in thermischem Gleichgewicht. Es fliesst also keine Wärme mehr.

Wärmeleitung

Verschiedene Materialien übertragen Wärme unterschiedlich schnell. Beispielsweise werden Metalle schon kurz nach dem erhitzen warm, während Glas erst nach einiger Zeit wärmer wird. Diese Eigenschaft der Wärmeleitfähigkeit wird quantitativ mit einem λ beschrieben. Sie gibt an, wieviel Wärme Q pro Sekunde über einen Meter durch einen Quadratmeter Querschnitt übertragen wird, bei einer anfänglichen Temperaturdifferenz von $\Delta T = 1K$. Es hilft, sich einen Würfel mit Kantenlänge $L = 1m$ vorzustellen, der auf zwei gegenübeliegenden Seiten in Kontakt ist mit Körpern, die eine Temperaturdifferenz von $\Delta T = 1K$ haben.

Wärmeströmung

Wärmestrahlung

2.3.7 spezifische und molare Wärmekapazität

Die Wärmekapazität C ist gegeben durch den Quotienten von Änderung der inneren Energie ΔU durch Änderung der Temperatur ΔT. Anders gesagt, gibt die Wärmekapazität an, wieviel Energie zum System hinzugefügt werden muss, damit sich dieses System um $1K$ erwärmt. Da ein grösseres System mit mehr Teilchen trivialerweise auch mehr Energie braucht, um die mittlere kinetische Energie und somit die Temperatur zu erhöhen ist die Wärmekapazität Massen abhängig. Es wird also durch die Masse m geteilt um zu normieren[29]. Beispielsweise ist die spezifische Wärmekapazität für Wasser $c_W = 4182 \frac{J}{kgK}$. Allgemein gilt[30]:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\Delta U}{m \Delta T}$$

Die molare Wärmekapazität ist dabei die Wärmekapazität C geteilt durch die Stoffmenge n. Auch so kann die Wärmekapazität normiert werden, hier nicht durch die Masse sondern durch die Stoffmenge. Die molare Wärmekapazität wird als c_M notiert.[31]

spezifische Wärmekapazität für Gase

Bei Gasen funktioniert die Überlegung gleich, jedoch muss man hier unterscheiden zwischen Erwärmen bei konstantem Druck oder bei konstantem Volumen. Die jeweiligen Wärmekapazitäten unterscheiden sich, wobei sie bei konstantem Druck höher ist. Das lässt sich leicht erklären, da man bei einem grösseren Volumen (konstanter Druck) zwangsläufig mechanische Arbeit verrichtet. Dabei wird die spezifische Wär-

[29] Die Wärmekapazität bzw. spezifische Wärmekapazität kann nur bei kleinen Temperaturdifferenzen als konstant angenommen werden. Tendenziell nimmt sie aber mit steigender Temperatur zu.

[30] Wie bereits erwähnt ist 'gross' C die Wärmekapazität und 'klein' c die spezifische Wärmekapazität.

[31] Erinnerung dass $n = \frac{N}{N_A}$ gilt, wobei N die Teilchenanzahl und N_A die Avogadro Konstante ist.

mekapazität für konstanten Druck als c_p und bei konstantem Volumen c_V genannt.

2.3.8 Phasenübergange

Bei idealen Gasen sind keine Phasenübergange möglich. Das Gas bleibt im gasförmigen Zustand. Echte Gase können die Phase ändern. Dabei hängen Phasenübergänge, von der Temperatur des Stoffes und dem Druck ab. Man kann sich den Einfluss vom Druck folgendermassen vorstellen: Der Druck auf den Stoff 'drückt' ihn in einen möglichst dichten Zustand. Dabei ist die dichteste Phase, mit Ausnahme von Eis immer der Feste Zustand[32]. Bei Phasenübergängen muss also neben den Zwischenmolekularen Kräften auch der Druck überwunden werden. Ob ein Phasenübergang stattfindet oder nicht, ist somit von Temperatur und Druck abhängig.

Schmelz- und Verdampfungswärme

In einem Festkörper sind Atome beziehungsweise Moleküle an ihren Platz gebunden. Bei steigender Temperatur nimmt zu beginn die kinetische Energie dieser Teilchen grösser. Ab einem geweissen Punkt, nähmlich beim erreichen der Schmelztemperatur wird zugeführte Energie nicht mehr in kinetische sondern ins brechen der Bindungen gesteckt. Ausserdem dehnt sich ein Stoff beim schmelzen in der Regel stark aus. Die Arbeit, welche fürs Ausdehnen des Systems zuständig ist, macht sich auch im Betrag der Schmelzwärme bemerkbar. Das führt dazu, dass Atome beziehungsweise Moleküle ihren Platz verlassen und der Stoff flüssig wird. Dabei wird die Energie, die gebraucht wird um ein Kilo eines bestimmten Stoffs zu schmelzen, spezifische Schmelzwärme genannt. Dabei gilt für die Wärme Q_m, die gebraucht wird um eine Masse m bei konstanter Temperatur beziehungsweise konstantem Druck zu schmelzen folgendes:

$$Q_m = m \cdot L_m$$

[32] In der Regel ist die Dichte-Differenz zwischen flüssig-gasförmig deutlich grösser als bei fest-flüssig. Deshalb macht sich der Einfluss vom Druck beim Verdampfen bzw. Kondensieren besser merkbar. Auch die Verdampfungswärme ist oft grösser als die Schmelzwärme.

Bei weiterem Zuführen von Energie zum Systems wird vorerst die kinetische Energie und somit auch die Temperatur grösser. Ab dem erreichen einer bestimmten Temperatur, dem Siedepunkt, wird weitere Energie nicht mehr in kinetische Energie gesteckt, sondern wird verwendet um Atome beziehungsweise Moleküle voneinander zu trennen und Anziehungskräfte zu überwinden. Ausserdem dehnt sich ein Stoff beim sieden in der Regel stark aus. Die Arbeit, welche fürs Ausdehnen des Systems zuständig ist, macht sich auch im Betrag der Verdampfungswärme bemerkbar. Dabei wird die Energie, die gebraucht wird um ein Kilo eines bestimmten Stoffs zu verdampfen, spezifische Verdampfungswärme genannt. Dabei gilt für die Wärme Q_v, die gebraucht wird um eine Masse m bei konstanter Temperatur beziehungsweise konstantem Druck zu sieden folgendes:

$$Q_v = m \cdot L_v$$

Bei beiden Prozessen (Schmelzvorgang sowie Verdampfungsvorgang) wird bei einem umkehren des Vorgangs (Gefriervorgang und Kondensation) die gleiche Energie frei. Es gilt also $Q_f = -Q_m$ und $Q_c = -Q_v$. Dabei stehen die Indizes immer für den jeweiligen Phasenübergang in Englisch (melting, vaporizing, freezing, condensating).

2.3.9 Äquipartitionstheorem

Das Äquipartitionstheorem oder auch Gleichverteilungssatz besagt, dass die Durchschnittsenergie eines einzelnen Moleküls gegeben ist durch:

$$\overline{E}_p = \frac{f}{2} k_B T$$

Hierbei ist mit den Freiheitsgraden f die Anzahl verschiedener »Energie-Töpfe« gemeint, die je nach momentaner Temperatur gefüllt werden können.[33] Anders

[33] Ein Wassermolekül (H_2O) hätte zum Beispiel 12 »Freiheitsgrade«. Drei kinetische Energien für die Translationen, drei Rotationsenergien und sechs für die Schwingungen (jeweils drei potentielle und kinetische Energien).

gesagt, ist die Gesamtenergie gleichmässig auf alle freigeschalteten »Energie-Töpfe« verteilt. Für die Gesamte innere Energie U gilt für n mol Moleküle:

$$U = nN_A \frac{f}{2} k_B T = n \frac{f}{2} RT$$

2.3.10 Thermodynamische Prozesse

Im folgenden werden die verschiedenen Prozessarten bei einer Veränderung der inneren Energie U genauer betrachtet.

2.4 Schwingungen und Wellen

Schwingungen sind alltägliche Phänomene. Definiert ist eine Schwingung als periodische Bewegung um eine Gleichgewichtslage. Dafür ist eine Gleichgewichtslage, ein Oszillator[34] und eine zur Gleichgewichtslage rücktriebende Kraft notwendig. Um solche Schwingungen zu beschreiben bedarf es einer Sprache die im folgenden eingeführt werden soll.

2.4.1 Harmonische Schwingungen

Die allgemein als einfachste Art einer Schwingung ist die sogenannte harmonische Schwingung. Dabei ist die Rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung und, da sie rücktreibend ist, in die andere Richtung zeigend. Anders ausgedrückt:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

Wobei x die Auslenkung von der Gleichgewichtslage ist. Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine Sinus beziehungsweise Kosinusfunktion. Es gilt, das eine

[34]Das oszillierende Objekt - das schwingende Objekt.

Grösse x, wenn sie harmonisch schwingt folgenden Verlauf zeigt:

$$x(t) = \hat{x}\sin(\omega t + \varphi)$$

Wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ist. Dabei gilt natürlich, dass diese Funktion periodisch ist:

$$x(t+T) = \hat{x}\sin\left(\frac{2\pi}{T}(t+T)+\varphi\right) = \hat{x}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+2\pi+\varphi\right) = \hat{x}\sin(\omega t+\varphi) = x(t)$$

Die Kinematik der harmonischen Schwingung ist durch differenzieren gegeben:

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{x}\sin(\omega t + \varphi) \\ v_x(t) &= \omega\hat{x}\cos(\omega t + \varphi) \\ a_x(t) &= -\omega^2\hat{x}\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Mit der vorhin aufgestellten Bedingung für harmonische Schwingungen ($\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$) erhalten wir folgende Gleichung:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Es gilt also, dass wenn eine einzige Kraft $F = -kx$ wirkt, wobei k konstant bleibt[35] die Bewegung als harmonische Schwingung beschrieben werden kann. Ausserdem ist die Potentielle Energie bei der Auslenkung x gegeben als:

$$E_{pot}(x) = \int_x^0 F dx = -k\int_x^0 x dx = \frac{1}{2}kx^2$$

Dabei ist dieses Integral auch intuitiv lösbar: Man weiss, dass die Kraft proportional zur Auslenkung abnimmt. Dann ist auch klar, dass in einem Kraft-Weg-Diagramm eine Gerade durch den Nullpunkt geht, wobei die Fläche unter diesem Graphen die Energie ist und als Fläche eines Dreiecks einfach berechnet werden kann mit

[35] Hier ist die Einheit interessant: $[k] = \frac{kg}{s^2} = \frac{N}{m}$

$\frac{1}{2}|F|x = \frac{1}{2}kx^2$.

Man könnte hier noch zahlreiche einfache bis schwierige Schwingungen diskutieren, wir belassen es aber bei einer kurzen Auflistung einiger Schwingungen um ein Gefühl für die Thematik zu bekommen.

- Ein schwimmender Holzwürfel, der heruntergedrückt wird. Dabei ist die zur Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft die Auftriebskraft beziehungsweise die Gravitationskraft.
- Wasser in einem gebogen Rohr, wobei die Rücktreibende Kraft die Gravitationskraft ist.
- Ein Drehpendel. Dabei ist die Rücktreibende Kraft die Gravitationskraft, wobei diese den sich Aufwickelnden und dadurch Aufsteigenden Oszillator angreift.
- Ein Fadenpendel bei kleiner Amplitude. Dabei ist die Rücktreibende Kraft die zum Faden normale Komponente der Gewichtskraft[36].

2.4.2 Gedämpfte Schwingungen

Alle realen Oszillatoren, die harmonisch schwingen verlieren über die Zeit an Schwingungsamplitude. Das liegt an verschiedenen Arten von Reibungen und Widerständen. Da harmonische Schwingungen jedoch deutlich leichter zu beschreiben sind als gedämpfte, und die Dämpfung oft vernachlässigt werden kann, ist die Beschreibung für harmonische Schwingungen trotzdem nützlich.

Häufig bei gedämpften harmonischen Schwingungen ist die Dämpfungskraft proportional zur Geschwindigkeit:

$$F_D = -dv = -d\dot{x}$$

[36] Nur bei kleinen Winkel kann diese Kraft als proportional zu Auslenkung angenähert werden (Kleinwinkelnäherung).

Dabei ist d die sogenannte Dämpfungskonstante mit $[d] = \frac{kg}{s}$. Wenn jetzt also auf die Masse m die Rücktreibende Kraft $F_R = -kx$ wirkt, so gilt für die gesamte Kraft:

$$F = F_D + F_R = -dv - kx$$

Beziehungsweise

$$\ddot{x} = -2\delta\dot{x} - \omega_0^2 x$$

Wobei $\delta = \frac{d}{2m}$ die sogenannte Abklingkonstante ist und ω_0^2 sei gegeben durch $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Die obige Differentialgleichung ergibt die folgende Lösung:

$$x = x_0 e^{-\delta t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t + \varphi_0\right)$$

An dieser Gleichung erkennt man eine abnehmende Amplitude. Ausserdem wird ersichtlich dass die Amplitude bei $d = 0$ beziehungsweise $\delta = 0$ konstant bleibt.

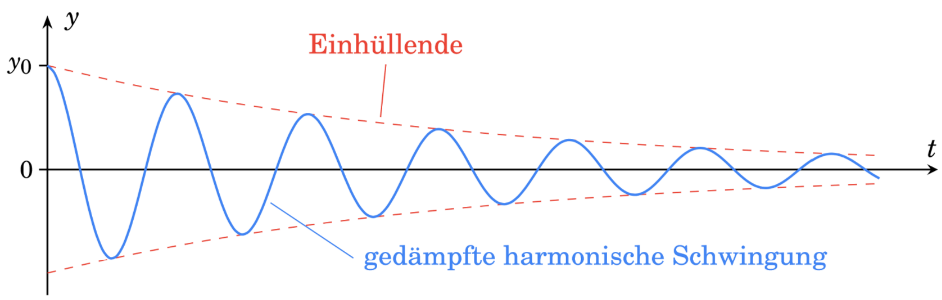


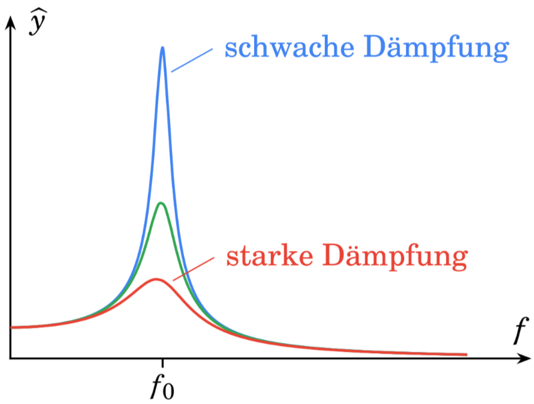
Abbildung 2.2: Gedämpfte harmonische Schwingung: Die Einhüllende ist gegeben durch die Amplituden zum Zeitpunkt t mit $\hat{x}(t) = x_0 e^{-\delta t}$. Trivialerweise wird diese Kurve an $x = 0$ beziehungsweise hier $y = 0$ gespiegelt.

2.4.3 Erzwungene Schwingung

Wenn ein Oszillator in Bewegung gesetzt wird, so schwingt er mit seiner eigenen Frequenz $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$. Wirkt an diesem Oszillator jedoch noch eine äussere Kraft mit einer eigenen Frequenz f, so liegt eine erzwungene Schwingung vor.

Nach einer gewissen Einschwingzeit bewegt sich das System immer mit der Erregerfrequenz f. Die Amplitude ist dann maximal, wenn Eigenfrequenz und Erregerfrequenz gleich sind. Man spricht von Resonanz.

Bei einer erzwungenen Schwingung hängt die Amplitude also von der Differenz der Frequenzen f beziehungsweise f_0 ab. Zudem spielt aber auch die Dämpfung eine wichtige Rolle: Je grösser die Dämpfung, desto kleiner die Amplitude.[37]



2.4.4 Überlagerung von Schwingungen

Wenn zwei oder mehrere Schwingungen gleichzeitig schwingen, können sich diese überlagern. Man spricht vom Superpositionsprinzip von Schwingungen (oder später auch Wellen). Im Fachjargon ist dieses Phänomen auch unter Interferenz bekannt. Dabei unterscheidet man in konstruktiver und destruktiver Interferenz[38], wobei jeweils alle teilnehmenden Schwingungen die gleiche Frequenz haben. Bei der konstruktiven Interferenz überlagern sich Schwingungen gerade so, dass deren Amplituden addiert werden. Sie sind also in Phase. Bei der destruktiven Interferenz geschieht das genauer Gegenteil. Die Schwingungen summieren sich zu Null, so dass keine Amplituden mehr vorhanden sind[39].

[37] Suche im Browser deiner Wahl nach "Gallopin' Gertie"!

[38] *constructivus*-eine förderliche, positive Handlung einnehmend

[39] Kopfhörer mit "noise-cancelling" funktionieren so, dass ein Mikrophon die Schwingungen wahrnimmt und eine gerade Phasenverschobene Schwingung über die Lautsprecher abspielt. Destruktive Interferenz. Beim sogenannten Transparenzmodus wird ein Ton der genau in Phase ist abgespielt.

Schwebung

Wenn zwei Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen interferieren kann man sich auf folgenden Ausdruck beziehen:

$$x = \hat{x}\sin(\omega_1 t) + \hat{x}\sin(\omega_2 t - \pi)$$

Additionstheoreme aus der Trigonometrie zeigen uns zusätzlich:

$$x = 2\hat{x}\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

Man erkennt eine Kombination von zwei Schwingungen, wobei die eine Schwingung die Kreisfrequenz $\overline{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ hat. Die andere Schwingung hat die Kreisfrequenz $\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$.

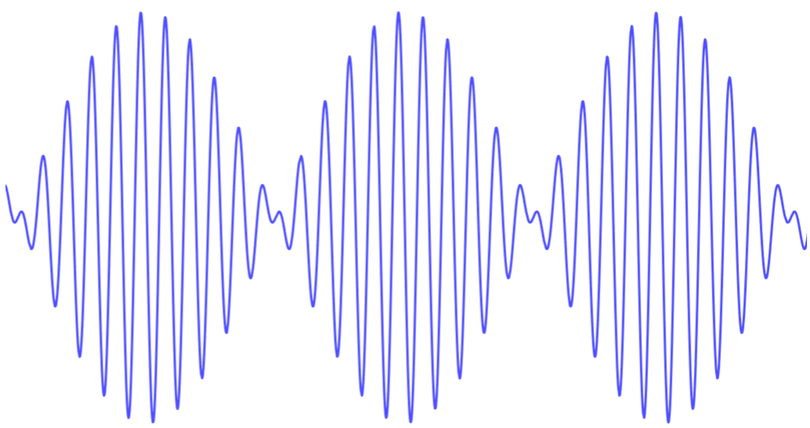


Abbildung 2.3: Schwebung: Man sieht die Überlagerung zweier Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen. $f_1 = 1.1Hz$, $f_2 = 1.0Hz$

2.4.5 Harmonische Wellen

2.5 Optik

2.6 Fluiddynamik

Die Fluiddynamik befasst sich, spektakulärer Weise mit der Dynamik von Fluiden. Anders gesagt mit den Zeitunabhängigen Parametern eines Systems, wobei dieses System ein Fluid, also eine Flüssigkeit oder ein Gas ist.

2.6.1 Druck

Ähnlich wie in der Thermodynamik gilt auch hier, dass Druck Kraft pro Fläche ist($p = \frac{F_\perp}{A}$). Wobei diese Kraft immer senkrecht zur Ebene ist.

2.6.2 Kompressible und inkompressibel Fluide

Bei kompressiblen Fluiden ist die Rede von solchen Fluiden, dessen Dichte aufgrund externer Kräfte variieren kann. Explizit sind dabei Gase gemeint. Flüssigkeiten können zwar genau genommen auch komprimiert werden, die Effekte sind dabei jedoch vernachlässigbar, weshalb Flüssigkeiten allgemein als inkompressibel eingestuft werden.

2.6.3 Hydrostatischer Druck

Man fülle einen stehendes Rohr mit Radius r, wobei er unten mit einem Deckel verschlossen ist, mit Wasser bis zur Höhe h. Die Kraft, die auf diesen Deckel wirkt ist gegeben durch

$$F_\perp = mg = \pi r^2 h \rho_w g$$

Wobei ρ_w die Dichte des Wasser und g der Ortsfaktor ist. Der Druck auf diesen Deckel kann weiter berechnet werden

$$p = \frac{F_\perp}{A} = \frac{\pi r^2 h \rho_w g}{\pi r^2} = \rho_w g h$$

Das faszinierende an diesem Resultat ist, dass die Form des Zylinders unwichtig ist. Der Druck ist nur abhängig von der Tiefe beziehungsweise Füllhöhe. Auch bei einer jeder Kombination von Gefässen ist der einzige relevante Faktor die Füllhöhe des Fluids. Es muss ausserdem noch der Umgebungsdruck dazu addiert werden. Allgemein gilt diese Gleichung natürlich auch für andere Fluide[40].

2.6.4 Auftrieb

Der Auftrieb ist ein Phänomen, das als eine Folge des Hydrostatischen Drucks interpretiert werden kann. Das bedeutet auch, dass eine Beschleunigung, wie die Gravitationsbeschleunigung nötig ist, damit Auftrieb zu beobachten ist. Für die Herleitung der Formel für den Auftrieb ist ein Gedankenexperiment, erstmals ausgedrückt von Simon Stevin hilfreich. Dabei stelle man sich ein Würfel eines Fluids vor, der im gleichen Fluid schwebt. Sein Ruhen lässt darauf folgern, dass dieser Würfel Kräftefrei ist. Anders gesagt ist die resultierende Kraft auf diesen Würfel null und die Schwerkraft wurde ausgeglichen. Genau diese ausgleichende Kraft ist die Auftriebskraft. Wenn jetzt aber unser Würfel mit einem anderen Würfel ersetzt wird, so bleibt die Auftriebskraft gleich, jedoch ist die Schwerkraft anders. Falls die Schwerkraft grösser ist als die Auftriebskraft, so wird der neue Körper zu Boden sinken. Falls die Auftriebskraft grösser ist wird der Körper schwimmen. Die Auftriebskraft eines Körpers mit Volumen V und Dichte ρ_K, der vollständig in einem Fluid der Dichte ρ_{fl} eingetaucht ist ist gegeben durch

$$F_A = V \rho_{fl} g$$

[40] $p = p_0 + \rho g h$

Der Körper ist Kräftefrei wenn gilt

$$\vec{F}_A + \vec{F}_G = 0 \Rightarrow V_v \rho_{fl} g = V \rho_K g \Rightarrow V_v \rho_{fl} = V \rho_K$$

Wobei V_v das verdrängte Volumen ist. Falls kein Gleichgewicht zwischen diesen Beiden Kräften gefunden werden kann, sinkt der Körper an den Boden[41], wobei die Normalkraft als dritte Kraft für ein Kräftegleichgewicht sorgt.[42]

2.6.5 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung ist eine Folge des Massenerhaltungssatz[43]. Man stelle sich ein Rohr vor, indem Wasser fliesst, wobei die Queerschnittsfläche am Punkt a, A_a ist und am Punkt b, A_b. jetzt gilt mit Blick auf den Massenerhaltungssatz trivialerweise[44]:

$$v_a \Delta t A_a \rho_a = v_b \Delta t A_b \rho_b$$

Anders gesagt: Die Massen bleiben erhalten. In einem zweiten Schritt wird ein System behandelt, das nicht abgeschlossen ist, sondern offen. Beispielsweise eine Flasche die mit Luft gefüllt wird. Die Masse pro Δt die in die Flasche kommt ist gegeben durch

$$\Delta m = v \Delta t A \rho_{in}$$

Dabei ist ρ_{in} die Dichte der Luft die in die Flasche kommt. Diese Luft kann nicht aus der Flasche entfliehen, weshalb die Dichte gemäss $\Delta m = \Delta \rho V$ grösser wird. Es

[41] Der Körper schwimmt wenn $\rho_{fl} > \rho_K$, er schwebt wenn $\rho_{fl} = \rho_K$ und er sinkt ab wenn $\rho_{fl} < \rho_K$.

[42] Eine andere Herleitung geht darauf zurück, mithilfe der Formel für den Hydrostatischen Druck die Kräfteunterschiede auf einen Körper die von oben beziehungsweise unten wirken zu bestimmen. Man erhält das gleiche für die Auftriebskraft.

[43] Ähnlich wie die Energie ist auch die Masse eine erhaltene Grösse. Man kann Masse nicht zerstören oder erstellen.

[44] Dabei sind im folgenden Abschnitt angenommen, die Geschwindigkeit über die ganze Fläche ist gleich.

gilt weiter:

$$\Delta\rho V = v\Delta t A\rho_{in} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{vA}{V}\rho_{in}$$

Wenn man die beiden Gleichungen kombiniert könnte man ein System beschreiben, in welchem Masse gestaut wird:

$$\frac{d\rho}{dt}V_{ab} = v_a A_a \rho_a - v_b A_b \rho_b$$

Dabei ist V_{ab} das Volumen zwischen den Punkten a und b. Diese Gleichung beschreibt also, wie sich die Masse zwischen a und b ändert.

2.6.6 Bernoulli Gleichung

Für die Herleitung der Gleichung stelle man sich eine Röhre vor, die an beiden Enden von je einem Kolben begrenzt ist. Dabei werden alle Grössen (Arbeit W, Distanz d, Höhe h, Querschnittsfläche A, Druck p und Geschwindigkeit v)an einem Ende mit a und am anderen Ende mit b markiert. Wenn man jetzt den Kolben bei a um d_a verschiebt, wird sich der Kolben bei b um $d_b = \frac{A_a}{A_b}d_a = \frac{V}{A_b}$ verschieben[45]. Die Arbeit W_a die dabei auf den Kolben a verrichtet wird ist gegeben durch $W_a = p_a A_a d_a = p_a V$. Die Arbeit auf den Kolben b ist dann gegen durch $W_b = -p_b A_b d_b$, wobei das Minus daher kommt, dass der Druck jetzt in die gleiche Richtung zeigt wie die nötige Kraft. Die totale Arbeit ergibt sich aus

$$W_{tot} = W_a + W_b = V(p_a - p_b)$$

Bei dieser Kolbenverschiebung wird eine Masse von ρV um $\Delta h = h_a - h_b$ verschoben, wobei die Änderung der potentiellen Energie gegeben ist durch:

$$\Delta E_{pot} = \rho V g \Delta h = \rho V g(h_a - h_b)$$

[45]Die Bernoulli Gleichung stimmt demnach nur bei kompressiblen Fluiden

Ausserdem ist die Änderung der kinetischen Energie gegeben durch:

$$\Delta E_{kin} = \frac{\rho V}{2}(v_a^2 - v_b^2)$$

Wenn jetzt alles zusammengefasst wird, erhält man folgenden Ausdruck

$$W_tot = \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} \rightarrow V(p_a - p_b) = \rho V g(h_a - h_b) + \frac{\rho V}{2}(v_a^2 - v_b^2)$$

Wenn man durch V dividiert und die Terme ein bisschen verschiebt kommt man auf folgende Gleichung, die als Bernoulli Gleichung bekannt ist.

$$\frac{v_a^2}{2}\rho + \rho g h_a + p_a = \frac{v_b^2}{2}\rho + \rho g h_b + p_b$$

Beziehungsweise die etwas handlichere Schreibweise:

$$\frac{v^2}{2}\rho + \rho g h + p = konst.$$

Dabei ist wichtig zu erwähnen, dass sich der Druck an die Geschwindigkeit anpasst und nicht vice versa. Das bedeutet auch, dass der Druck nicht als Hydrostatischer Druck geschrieben werden kann ($p \neq p_0 + \rho h g$).

2.6.7 Oberflächenspannung und Kapillardruck

Da die beiden folgenden Themen nicht von mir nicht als wirklich wichtig empfunden werden, werde ich diese Themen nur oberflächlich zusammenfassen und vielmehr einen qualitativen Einblick geben, als auf konkrete Formeln einzugehen.

Oberflächenspannung

Die Oberflächenspannung eines Fluides kommt von den Anziehungskräften der Moleküle. Ein bestimmtes Molekül des Fluides hat allgemein eine Anziehungskraft auf andere Moleküle. Die Moleküle an der Oberfläche haben nur benachbarte Moleküle unter ihnen beziehungsweise im Körper drin. Man kann sich das vorstellen wie ein Haufen Menschen[46] die so nahe wie möglich beisammen sein wollen[47]. Diese Menschenmasse würde bei idealen Bedingungen die Form eines Kreises annehmen. Um die Fläche die diese Menschen einnehmen um eine Differenz ΔA zu vergrössern, wäre eine Energie $W = \Delta E$ nötig um die Menschen voneinander zu trennen. Das Verhältnis von der Energie zur Fläche ist defient als Oberflächenspannung (klein Sigma)

$$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta A}$$

Kapillardruck

Wenn man einen Strohhalm in ein Wasserglas steckt, lässt sich beobachten, wie das Wasser innerhalb des Strohhalms höher ist als sonst im Glas. Das liegt an der sogenannten Adhäsionskraft, für die es bedauerlicherweise bis heute keine Erklärung gibt. Auf jeden Fall werden einige wenige Teilchen die am Strohalm sind, heraufgezogen. Die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen folgen darin, dass auch andere Teilchen mit nach oben gezogen werden, wobei eine Art Hängebrücke entsteht. Umso schmaler ist das Kapillargefäss, umso höher kann das Fluid kommen. Man kann sich vorstellen, dass sich eine lange Hängebrücke deutlich mehr nach unten durchbiegt. Der Kapillardruck ist der Druck, der das Fluid die Röhre hinauf drückt. Für ihn gilt:

$$p_C = \frac{2\sigma \cos\Theta}{r}$$

Wobei γ die Oberflächenspannung und Θ der Kontaktwinkel[48] ist. Um die Höhe des Fluides zu berechnen muss p_C gleich dem Hydrostatischen druck gesetzt werden und nach h aufgelöst werden.

[46] Weiter stehen Menschen stellvertretend für Moleküle.

[47] Das Ausdenken von praktischen Beispielen überlasse ich den Lesenden.

[48] Der Winkel zur Röhrenwand, wobei dieser mit der Tangente zur "Hängebrücke" identifiziert werden kann.

2.6.8 Reibung in Fluiden

Die Reibung in Fluiden ist ein wichtiger Aspekt der Fluiddynamik, der bis jetzt gekonnt ignoriert wurde. Das Problem an der Reibung in Fluiden ist, dass es unzählige Formeln für alle möglichen Formen und Fluideigenschaften. Zudem unterscheidet man bei der Reibung in Fluiden zwischen laminaren und turbulenter Strömung[49]. Eine genaue Formel für eine Kugel mit Radius R ist die folgende[50]:

$$F_r = 6\pi\mu R v$$

Wobei μ die Viskosität des Fluids ist. Für turbulente Reibung gilt folgende Gleichung:

$$F_r = c_W A \rho \frac{v^2}{2}$$

Wobei c_W ein Reibungskoeffizient ist, der abhängig von Material und Form des Objektes ist. A ist die Fläche senkrecht zur Geschwindigkeit.

2.7 Elektrostatik

2.7.1 Elektrische Ladung

Man unterscheidet zwei Arten von elektrischen Ladungen: Positiv und negativ. Dabei sind Positive Ladungsträger Protonen, Teichen oder ganze Körper die eine netto Positive Ladung tragen. Das gleiche gilt für negative Ladungsträger, wobei diese mehr Elektronen als Protonen aufweisen. Grundssätzlich gilt für die Ladung eines Elektrons beziehungsweise Protons folgendes:

$$Q_p = e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$$
$$Q_e = -e = -1.602 \cdot 10^{-19} C$$

[49] Bei der laminaren Strömung sind Strömungen geradlinig. Bei turbulenter Strömung bewegt sich das Fluid deutlich wilder, es sind Wirbel beobachtbar.

[50] "First, we assume a cow to be spherical"

Dabei ist das e als Elementarladung bekannt, wobei die Einheit Coulomb C ist. Mit ihr quantifiziert man Ladungen beziehungsweise wie gross eine bestimmte Ladung ist.

2.7.2 Coulomb Kraft

Ladungsträger mit gleichnamiger Ladung[51] stossen sich ab. Ladungsträger mit ungleichnamigen Ladungen ziehen sich an. Diese Abstossung beziehungsweise Anziehung kann durch die Coulomb Kraft wie im folgenden beschrieben werden:

$$\vec{F}_{C,12} = k_C \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r}$$

Die Coulomb Kraft beschriebt also die Kraft auf Q_2 wobei $\vec{r}$ von Q_1 zu Q_2 gemessen ist. Die Richtung der Kraft ist gegeben durch $\frac{\vec{r}}{r}$.

Influenz

Wir haben bereits gesehen, wie sich die Coulomb Kraft bei zwei geladenen Körpern bemerkbar macht. Wenn jedoch nur einer der beiden Körper geladen ist kann es auch zu Abstossungen beziehungsweise Anziehungen kommen. Dieses Phänomen lässt sich mit der sogenannten Influenz bezeichnen.
Influenz ist die verschiebung des Ladungsschwerpunkts innerhalb eines Körpers aufgrund von Einwirkung äusserer Ladungen. Man stelle sich den Aufbau eines Metalls vor, wobei daran erinnert werden muss, dass die Valenzelektronen in Metallen eine gewissen Freiheit haben, sich also nicht zwingen in der Nähe des Atomkerns befinden. Falls jetzt also ein ungeladenes Metall in die Nähe eines Ladungsträgers kommt, verschieben sich die Elektronen im Metall. Fall die äussere Ladung positiv ist, verschieben sich die inneren Elektronen hin zum Ladungsträger und vice versa.

[51] Beide Ladungen haben das gleiche Vorzeichen, sind also beide negativ oder beide positiv geladen.

Superpositionsprinzip

Wie immer bei Kräften, gilt auch für die Coulomb Kraft das Superpositionsprinzip. Falls also mehrere Ladungen gegenseitig wechselwirken, müssen alle einzelnen Kräfte beachtet werden, erst dann kann die resultierende Kraft vektoriell berechnet werden. Es gilt:

$$\vec{F}_{res} = \sum_i \vec{F}_i$$

Sobald mehrere Kräfte auf eine Ladung wirkt oder die Kräfte nicht mehr zwischen Punktladungen sind, nennt man die Resultierende Kraft nicht mehr Coulomb Kraft F_C, sondern elektrische Kraft F_{el}.

2.7.3 Elektrisches Feld und Feldstärke

Man stelle sich eine Ladung Q im Raum vor. Jede weitere Probeladung q die mit Abstand r von dieser Ladung im Raum platziert wird, würde eine Coulomb Kraft $F_C = k_C \frac{qQ}{r^2}$ erfahren. Man kann sich ein Kräftefeld um die Ladung Q vorstellen.
Allgemein gilt, dass mehrere Ladungen ein Feld erzeugen können. Dann lässt sich die elektrische Feldstärke definieren als Quotienten der elektrischen Kraft $\vec{F}_{el}$ und der Ladung q:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}}{q}$$

Man kann sehen, dass das elektrische Feld immer in die Richtung der Kraft, auf eine positive Probeladung zeigt.
Auch hier gilt wieder das Superpositionsprinzip. Eine elektrisches Feldstärke lässt sich folgendermassen beschrieben:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}}{q} = \sum_i \frac{\vec{F}_{el,i}}{q} = \sum_i \vec{E}_i$$

2.7.4 Elektrische Spannung

Man stelle sich eine Ladung q in einem elektrischen Feld E vor. Diese Ladung wird nun über eine Distanz d frei[52] beschleunigt. Die kinetische Energie ändert sich wie folgt:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) = qEd$$

Wobei die letzte Umformung gilt, da $\Delta E = W$ und $W_{el} = F_{el}d = qEd$. Diese verrichtete Arbeit kommt von der sogenannten elektrischen Spannung des Feldes. Dabei ist die elekrische Spannung U zwischen zwei Punkten A und B definiert als:

$$U_{AB} = \frac{W_{el,A\rightarrow B}}{q}$$

Dabei hat die Spannung U die Einheit $[U] = \frac{J}{C} = V$ (Volt).
Eine Spannung herrscht immer zwischen zwei unterschiedlichen Orten. Sie muss also auch zwischen zwei Orten gemessen werden.

Gravitationsfeld-Analogie und Äquipotenziallinien

Ähnlich wie im Gravitationsfeld der Erde gibt es auch im elektrischen Feld sogenannte Äquipotenziallinien beziehungsweise Ebenen. Um ein Gewicht(Gravitationsfeld) oder eine Ladung (elektrisches Feld) auf einer Äquipotenzialebenen zu verschieben, muss keine Arbeit verrichtet werden - Das Potential bleibt gleich. Einzig für das Verändern der Höhe beziehungsweise des Abstandes zu anderen Ladungen muss Arbeit verrichtet werden. Um die Analogie zu vervollständigen kann man Spannung und Ortsfaktor vergleichen. Je grösser die Spannung, desto mehr Arbeit muss verrichtet werden um eine Ladung q im elektrischen Feld entlang beziehungsweise entgegen[53] den Feldlinien zu verschieben. Analog dazu ist die nötige Arbeit um eine Masse m, entlang der Feldlinien des Gravitationsfeldes zu verschieben proportional

[52] ohne äussere Einwirkungen abgesehen vom elektrischen Feld
[53] Man beachte, dass Ladung im Gegensatz zur Masse positiv wie auch negativ sein kann.

zum Ortsfaktor g. Bemerkenswert ist auch die Ähnlichkeit zwischen Gravitations- und elektrischer Kraft.

$$\vec{F}_E = k_C \frac{qQ}{r^3}\vec{r}$$
$$\vec{F}_{Gr} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}$$

2.8 Gleichstrom

2.8.1 Elektrischer Strom und Driftgeschwindigkeit

Der elektrische Strom ist definiert als Ladung ΔQ durch den Leiterquerschnitt pro Zeit Δt.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Dabei hat die Stromstärke I die Einheit $[I] = \frac{C}{s} = A$ (Ampere)[54]. Ein Strom fliesst, sobald es Spannungsunterschiede gibt. Dann bewegen sich meistens Elektronen[55] so, dass die Ladungsunterschiede ausgeglichen werden können.
Da der elektrische Strom erst nach der Idee genauer verstanden wurde, ist der Strom (oder auch technischer Strom) als Driftgeschwindigkeit von Protonen beziehungsweise positiven Ladungen definiert. Dabei 'bewegen' sich die positiv geladenen Ladungsträger vom Pluspol weg, hin zum Minuspol.
Elektronen bewegen sich im mittel mit einer Schnelligkeit $\overline{v}_e$ in eine zufällige Richtung. Diese Elektronengeschwindigkeit ist gegeben durch die kinetische Gastheorie2.3.4:

$$\overline{v}_e = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$$

[54]Aufgrund der Wichtigkeit des elektrischen Stroms, wurde Ampere als SI-Einheit definiert. Coulomb ist dabei die von Ampere abgeleitete Einheit: $[Q] = C = As$ (Amperesekunden)
[55]Grundsätzlich würde auch ein Protonenfluss ein Strom ergeben, in der Realität bewegen sich jedoch meistens Elektronen beziehungsweise negativ geladene Ionen.

Wenn eine Spannung angelegt wird, wird die Richtung, in die die Spannung anliegt von den Protonen präferiert und im mittel bewegen sich die Elektronen beziehungsweise Protonen tatsächlich in eine Richtung. Diese Geschwindigkeit ist die Driftgeschwindigkeit. Die Driftgeschwindigkeit ist (bei normalen Stromstärken) nur ein Bruchteil der mittleren Elektronenschnelligkeit.

Beispiel

Gegeben ist ein Abschnitt eines Leiters mit der Länge s. In diesem Leiterabschnitt sind N Elektronen frei. Es ist also insgesamt eine Ladung von $\Delta Q = -N \cdot e$ frei. Die Driftgeschwindigkeit sei gegeben durch $v_D = \frac{s}{\Delta t}$. Weiter lässt sich der Strom wiefolgt beschrieben:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{N \cdot e \cdot v_D}{\Delta x}$$

Das bedeutet, wenn man weiss, wie der Leiter aufgebaut ist, also wieviel freie Elektronen in einem gewissen Leiterabschnitt zu finden sind, ist die Stromstärke nur abhängig von der Driftgeschwindigkeit.
Um die Grössen genauer zu verstehen, setzen wir $v_D = \overline{v}_e$ bei Zimmertemperatur und berechnen die Stromstärke für einen Kupferdraht mit Querschnittsfläche $A = 1.5mm^2 = 1.5\mu m^2$ und einer Abschnittslänge $\Delta x = 10cm = 0.1m$. Mit einem Blick in die Literaturwerte von Kupfer lässt sich die Anzahl Atome bestimmen:

$$N_{Cu} = N_A \frac{\rho_{Cu} A \Delta x}{M_{Cu}} = 6.02 \cdot 10^{-23} \frac{8.92 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 1.5 \cdot 10^{-6} m^2 \cdot 0.1m}{63.5 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{mol}} = 1.27 \cdot 10^{22}$$

Um die Stromstärke zu bestimmen geht man davon aus, dass jedes Atom im Schnitt ein Leiterelektron zur Verfügung stellt. Die Stromstärke ist dann:

$$I = -\frac{N \cdot e\sqrt{\frac{3k_BT}{m_e}}}{\Delta x} = -\frac{1.27 \cdot 10^{22} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}C\sqrt{\frac{3 \cdot 1.381 \cdot 10^{-23}\frac{m^2kg}{s^2K} \cdot 300K}{9.109 \cdot 10^{-31}kg}}}{0.1m} = 2.38GA$$

Im Vergleich dazu sind schon $50mA$ tödlich, wenn sie durch den Menschlichen Körper fliessen. Es ist also klar, dass die Driftgeschwindigkeit nur ein Bruchteil der Elektronenschnelligkeit haben kann.

2.8.2 Widerstände

Der elektrische Wiederstand R ist ein Mass dafür, wieviel Spannung U angelegt werden muss, damit ein Strom der Stärke I fliessen kann.

$$R = \frac{U}{I}$$

Dabei hat der Widerstand die Einheit $[R] = V/A = \Omega$ (Ohm). Ein Widerstand kann als Komponente in einem Stromkreis verbaut werden oder in einem anderen Komponenten als Nebenwirkung auftreten. Auch Leiter haben in der Regel einen elektrischen Widerstand[56]. Widerstände in Leiter können jedoch oft vernachlässigt werden, wenn andere Komponenten am Stromkreis angehängt sind.

Widerstände im Teilchenmodell

Man stelle sich einen Leiter vor. Darin können sich die Elektronen frei bewegen und ohne eine angelegte Spannung ist die Driftgeschwindigkeit gleich null. Falls nun eine Spannung angelegt wird, stellt sich eine Driftgeschwindigkeit der Elektronen ein. Dabei stossen sie mit anderen Elektronen und auch Atomrümpfen zusammen. Es liegt

[56] Ein Material ohne Widerstand ist ein Supraleiter (oder idealer Leiter). Diese Eigenschaft kann jedoch bis jetzt nur im Quantenzustand unter Temperaturen nahe am Nullpunkt erreicht werden.

nahe, dass die Elektronen weniger oft mit Atomrümpfen zusammenstossen, wenn sie mehr platz haben. Diese stösse mit den Atomrümpfen hindern die Elektronen daran, sich in die Richtung der Driftgeschwindigkeit zu bewegen. Das ist also der elektrische Widerstand. Einen Widerstand als Komponente kann man sich als Leiter mit sehr kleiner Querschnittsfläche vorstellen.

Ohm'sches Gesetz

Das Ohm'sche Gesetz besagt, dass in Ohm'schen Widerständen[57] der Widerstand konstant ist. Anders gesagt, steigt der Strom durch den Widerstand proportional zur Spannung.

$$U = RI$$

Das Ohm'sche Gesetzt könnte auch von $R = \frac{U}{I}$ abgeleitet werden. Die Schreibweise vom Ohm'schen Gesetz ist bei konstantem Widerstand R jedoch deutlich angenehmer.[58]

2.8.3 Kondensatoren

Ein Kondensator[59] kann viele verschiedene Bauformen haben. Grundsätzlich funktionieren alle Kondensatoren gleich. Der Stromkreis wird unterbrochen, wobei beide "Enden" mit Platten ersetzt werden. Bei einem Strom fliesst keine Ladung mehr, sondern Sammelt sich auf der einen Platte an. Auf der anderen Platte wird die gleiche Ladung entfernt beziehungsweise die gleiche Ladung mit anderem vorzeichen angesammelt. Das führt dazu, dass ein elektrisches Feld entsteht, was bedeutet, dass eine Spannung zwischen den Platten gemessen werden kann. Dabei gilt, dass die angesammelte Ladung proportional zur Spannung ist[60]. Zudem gilt trivialerweise

[57] Widerstände die dem Ohm'schen Gesetz folgen.

[58] Das Ohm'sche Gesetz kann man sich leicht mit dem Kanton Uri merken.

[59] Kondensatoren haben im Gleichstrom noch keine grosse Bedeutung. Sie gelten als Grundlage für den Wechselstrom.

[60] Siehe dafür Elektrisches Feld 2.7.3 und Elektrische Spannung 2.7.4

für die angesammelte Ladung, dass sie gleich dem Integral des Stroms ist[61].

$$Q = \int I dt = CU$$

Dabei ist C eine Proportionalitätskonstante und wird Kapazität genannt. Sie hat die Einheit Farad $F = \frac{C}{V}$. Die Kapazität ist Abhängig vom Kondensator. Insbesondere von der Form, Grösse sowie der relativen Lage der beiden Platten, dem Isolator zwischen den Platten et cetera. Für einen Plattenkondensator gilt:

$$C = \frac{A}{d}\epsilon_0\epsilon_r$$

Hierbei ist ϵ_0 die elektrische Feldkonstante und ϵ_r die Dielektrizitätszahl[62], die angibt, wie stark das elektrische Feld zwischen den Platten durch das Dielektrikum[63] gehemmt wird. A steht für die Fläche einer Kondensatorplatte (angenommen beide sind gleich gross) und d steht für den Abstand der beiden Platten.

Der Kondensator kann sich aufladen bis die Kapazität erschöpft ist beziehungsweise bis die Spannung über dem Kondensator gleich der Quellspannung ist. Dabei lädt sich der Kondensator mit fortlaufender Zeit immer langsamer auf, da die Kapazitäten erschöpft werden beziehungsweise ein stabiler Gleichgewichtszustand angestrebt wird.

entladen von Kondensatoren

Der Ladungsprozess wurde bereits vorhin erläutert. Man stelle sich vor, wie man mit einem Schalter die Spannungsquelle aus dem Kreis entfernt und mit einem einfachen idealen Leiter ersetzt. Die vorhin geladenen Kondensatoren haben noch immer die Ladung gespeichert. Wird also die Quellspannung durch einen Leiter ersetzt, so

[61]Anders gesagt gilt: $\dot{Q} = I$

[62]Für ein Vakuum gilt $\epsilon_r = 1$ und für luft gilt $\epsilon_r = 1.00058$

[63]Materie im elektrischen Feld, dass nicht leitet oder wobei die elektrische Leitfähigkeit vernachlässigbar klein ist.

entlädt sich der Kondensator bis wieder ein stabiles Gleichgewicht herrscht. Dabei wird die Stromrichtung umgekehrt und die Stromstärke nimmt mit fortlaufender Zeit ab, da nach jeder Zeit während des Entladungsprozess, der Stromkreis näher an einem stabilen Gleichgewicht ist.

gespeicherte elektrische Energie

Um Ladung auf den Kondensator zu bringen ist Arbeit nötig. Wenn eine kleine Ladung dq auf den Kondensator gebracht werden soll, so ist eine kleine Arbeit dW_{el} nötig. Für eine elektrische Arbeit gilt, wie in 2.7.4 bereits erklärt:

$$W_{el} = Uq$$

Das heisst auch, dass gilt $dW_{el} = Udq$. Mit Integrieren und dem Gedanken, dass $Q = U_C C$ beziehungsweise $U_C = \frac{Q}{C}$ gilt, erhält man folgendes[64]:

$$W_{el} = \int_0^Q U_C dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Mit dem gleichen Gedanken erhält man:

$$W_{el} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} = \frac{U^2 C}{2}$$

2.8.4 Kirchhoffs Gesetze

Kirchhoff hat zwei fast schon triviale und doch vitale Gesetze für Stromkreise aufgestellt.

[64] U_C steht dabei für die Spannung über dem Kondensator (capacitor).

Gesetz des Stroms

Das Strom Gesetz besagt, dass an jedem Punkt im Stromkreis, an dem keine Ladung staut[65] die Summe aller Ströme null sein muss. Dabei werden Ströme zu dem bestimmten Punkt als positiv behandelt, Ströme weg vom Punkt als negativ.

$$I_{res} = \sum_i I_i = 0$$

Gesetz der Spannung

Das Spannungsgesetz besagt, dass in einem bestimmten Stromkreis die Summe aller Spannungen (gemessen über alle Komponenten inklusive der Spannungsquelle) null sein muss. Dieses Gesetz ist gleichbedeutend mit der Tatsache, dass keine Spannung an einem einzelnen Punkt herrschen kann, sondern nur über zwei Punkte.

2.8.5 Widerstände im Stromkreis

Im folgenden Abschnitt werden wir das Verhalten mehrerer Widerstände im gleichen Stromkreis genauer anschauen. Dafür unterscheiden wir vorerst in zwei Arten, Widerstände zu kombinieren.

Serielle Widerstände

Wenn man zwei oder mehr Widerstände nacheinander einbaut, so, dass der Leiter von Widerstand zu Widerstand geht, lässt sich der gesamte Widerstand als Ersatzwiderstand schreiben. Dabei lassen sich die Widerstandswerte der seriell geschalteten Widerständen einfach addieren.

$$R_{res} = \sum_i R_i$$

Hier steht R_i für die einzelnen Widerstandswerte. Weiter können wir mit dem Stromgesetz von Kirchhoff 2.8.4 argumentieren, dass der Strom durch alle Widerstände

[65] Beispielsweise bei einem Kondensator gilt dieses Gesetzt nicht.

gleich ist.

$$I_{res} = I_i = I$$

Da die Stromstärke durch jeden Widerstand gleich ist, ist die Beschriftung mit Indizes nicht nötig. Mit einem Blick auf die Spannung wird klar, dass an jedem Widerstand R_i eine Spannung U_i abfällt, wobei $U_i = R_i I$ gilt. Also:

$$U_{tot} = \sum_i U_i = \sum_i R_i I = R_{res} I$$

Ausserdem gilt:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Parallele Widerstände

Widerstände sind parallel, wenn alle parallelen Widerstände den gleichen In- und Output haben. Der Strom kann also zwischen den Widerständen aufgeteilt werden, wird am Ende der Parallelschaltung jedoch wieder zusammengefasst. Da alle Widerstände den gleichen In- und Output haben, ist klar dass die Spannung über die Parallelschaltung gleich der Spannung über einen Widerstand sein muss.

$$U_{res} = U_i = U$$

Wieder kann man auf Indizes verzichten. Aus $I = \frac{U}{R}$ ergibt sich, $I \propto \frac{1}{R}$. Anders gesagt wird der Strom aufgeteilt, so dass am meisten Strom durch den Widerstand mit dem tiefsten Widerstandswert fliesst[66]. Es gilt:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

[66] Falls ein Widerstand parallel zu einem idealen Leiter geschaltet wird, wird der gesamte Strom durch den Leiter fliessen.

Beziehungsweise für den ganzen Strom I_{tot}:

$$I_{tot} = \sum_i I_i = \sum_i \frac{U}{R_i} = U \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Der gesamte Widerstand ergibt sich aus $R_{res} = \frac{U}{I_{tot}}$. Für ihn gilt also:

$$R_{tot} = \frac{U}{I_{tot}} = \frac{U}{\sum_i \frac{U}{R_i}} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}} = \left(\sum_i \frac{1}{R_i}\right)^{-1}$$

Kombination

Bei einer Kombination von parallel und seriell geschalteten Widerständen kann eine gute Technik sein, alternierend serielle Widerstände und parallel geschaltete Widerstände zusammenzufassen, bis alle Widerstände zu einem "Ersatzwiderstand"[67] vereinfacht werden können.

2.8.6 Elektrische Leistung

Die Spannung gibt an, wieviel Energie eine Ladungsträger mit $Q = 1C$ bekommt, wenn er durch eine Spannung geht. Die Stromstärke gibt an, wie viel Ladung pro Sekunde durch einen Leiterquerschnitt fliesst. Das Produkt von Spannung und Stromstärke gibt daher an, wie viel Energie pro Sekunde aufgenommen wird. Kurz die elektrische Leistung.

$$U = \frac{W_{el}}{\Delta Q} \qquad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad \Rightarrow P_{el} = IU = \frac{W_{el}}{\Delta t}$$

Über einem Ohm'schen Widerstand ($U = RI$) kann die elektrische Leistung folgendermassen ermittelt werden:

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

[67] Der Ersatzwiderstand für zwei seriell geschaltete Widerstände könnte folgendermassen aussehen: $R_{1'} = R_{1+2} = R_1 + R_2$. Für einen parallelen Ersatzwiderstand so: $R_{1'} = R_{1||2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$

Exkurs: Gefahren von Strom

- **Kurzschlüsse:** Aufgrund der Wärmewirkung von elektrischem Strom erwärmen sich Widerstände[68] immer. Falls zum Beispiel die Kabel dicke nicht richtig dimensioniert ist, und zu viel Strom fliesst, können Kabel durchbrennen oder in der Nähe stehende Objekte entflammen. Falls ein Widerstand im Leiter mit einem fast idealen Leiter überbrückt wird, so ist der Strom fast unbegrenzt und es kann zu einem Kabelbrand führen. Dann spricht man von einem Kurzschluss.

- **Sicherungen:** Um zu verhindern, dass ein zu starker Strom fliesst, gibt es sogenannte Sicherungen, die bei einem zu hohen Strom die Leitung unterbrechen um Kabelbrände zu verhindern. Eine Sicherung kann ein wenig isolierter Leiter sein, der bei einem zu hohen Strom durchbrennt. Solche Sicherungen nennt man Schmelzsicherungen. Sie müssen nach jedem Einsatz ersetzt werden. Eine zweite Art von Sicherungen ist ein sogenannter Sicherungsautomat. Bei diesem wird vom Strom ein Magnetfeld erzeugt[69], welches dazu führt, dass die Stromleitung mechanisch unterbrochen wird.

- **Gefahren für den Menschen:** Muskeln kontrahieren, wenn ein entsprechender elektrischer Strom durch den entsprechenden Nerv geht. Wenn der Menschliche Körper in Kontakt mit einer externen Spannungsquelle kommt, fliesst ein vom Mensch nicht kontrollierter Strom durch den eigenen Körper. Das führt dazu, dass sich Muskeln unkontrolliert ca. 50 mal pro Sekunde[70] kontrahieren. Das führt zu Krämpfen und beispielsweise beim Herz dazu, dass der Kreislauf eingestellt wird. Je starker der Strom beziehungsweise je länger man unterm Einfluss einer Spannung ist, desto gefährlicher sind die Auswirkungen.

[68] Alle Komponenten ausser Supraleitende.
[69] Magnetismus wird im nächsten Kapitel genauer behandelt.
[70] Da der Strom oftmals Wechselstrom2.10 ist, wobei 50 Hz eine übliche Frequenz ist.

2.9 Magnetismus und Elektrodynamik

Dieses Kapitel wird sich Magnetismus, Elektrodynamik und der Induktion widmen. Dabei sind die Themen stark mit denjenigen der Elektrostatik verwandt. Später werden Konzepte wie das Magnetische Feld eingeführt und diskutiert. Das Vorhandensein dieser Konzepte, kann mit relativistischen Kalkulationen hervorgesagt werden. Diese würden jedoch das Format sprengen, weshalb einige Konzepte als phänomenologisch betrachtet werden. Es gilt diese Konzepte zu beschrieben, wobei ein wirkliches Verständnis noch nicht relevant ist.

2.9.1 Dauermagnete und Ferromagnetismus

Magnete haben grundsätzlich zwei Pole. Diese werden als Nord- und Südpol unterschieden[71]. Dabei stossen sich, ähnlich wie bei Ladungen, gleiche Pole ab und unterschiedliche Pole ziehen sich an.

Neben den Dauermagneten die, wie der Name suggeriert dauerhaft magnetisiert sind, gibt es Materialien die magnetisiert werden können. Dabei können sie auch ent- oder remagnetisiert werden, was auch bedeutet, dass Nord- und Südpol nicht lokal festgelegt sind. Man spricht bei solchen Stoffen von Ferromagneten[72].

Weiss'sche Bezirke

Um die Funktionsweise von Ferromagneten genauer zu verstehen ist eine mikroskopische Betrachtung sinnvoll. Der französische Physiker Pierre-Ernest Weiss erkannte, dass bei Ferromagneten die sogenannten Elektrospins parallel zueinander ausgerichtet sind. Bei nicht magnetisierten sind diese Spins nur in begrenzten Bereichen parallel ausgerichtet. In den sogenannten Weiss'schen Bezirken. Sobald ein Ferromagnet durch einen Dauermagneten magnetisiert wird, werden die Weiss'schen Bezirke grösser und (fast) alle Elektrospins sind parallel ausgerichtet.

[71]Der Nordpol zeigt in Richtung des Geographischen Nordens. Für den Südpol gilt das Gegengleiche.
[72]Nur Eisen, Kobalt und Nickel sind in reiner Form ferromagnetisch.

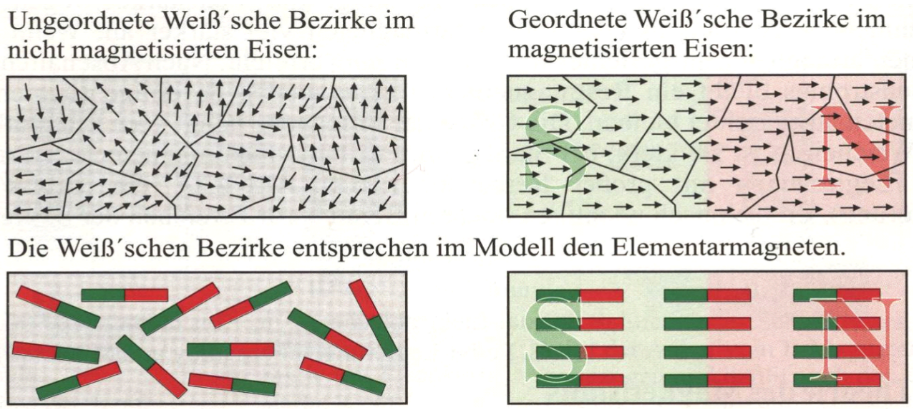


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung eines Ferromagneten. Dabei stellen die Pfeile/Stabmagneten die Elektrospins dar.

2.9.2 Magnetisches Feld

Die Funktionsweise von Magneten beruht auf der Beschreibung des magnetischen Felds. Dabei gehen die Feldlinien immer vom Nord zum Südpol und zeigen demnach in die Richtung, in die ein Kompass zeigen würde. Ausserdem stossen sich nahe beieinanderliegende Magnetfeldlinien, die in die gleiche Richtung zeigen gegenseitig ab. Magnetfeldlinien die in die entgegengesetzte Richtung zeigen ziehen sich an. Das ist was die Anziehungs- beziehungsweise Abstossungskräfte erklärt.
Ein entscheidender Unterschied zum elektrischen Feld ist, dass es keine Monopole gibt. Das bedeutet, dass Feldlinien immer geschlossene Formen haben.[73]

Strom und Magnetfelder

Wenn man einen Kompass unter einen nicht-stromdurchflossenen Leiter plaziert, so zeigt die Kompassnadel in Richtung des geographischen Nordpols. Fliesst nun aber ein Strom durch diesen Leiter, so bricht die Nadel aus[74]. Ein Strom erzeugt also ein Magnetfeld, wobei man die Rechte-Hand-Regel anwenden kann um die Richtung der Magnetfeldlinien zu bestimmen. Der Daumen zeigt dabei in Richtung des technischen

[73]Wenn man einen Stabmagneten in der Mitte halbieren würde hätte man zwei kleinere Stabmagneten mit jeweils Nord- und Südpol.
[74]Hier sollte der Leiter parallel zu den Magnetfeldlinien aufgestellt werden.

Strom[75]. Die Magnetfeldlinien sind dabei Kreisförmig um den Leiter und zeigen in Richtung der andern vier Finger.

2.9.3 Lorentz Kraft

Wenn man einen Stromdurchflossenen Leiter in ein homogenes Magnetfeld platziert, und der Leiter normal zu den Magnetfeldlinien ist, so sieht das resultierende Magnetfeld folgendermassen aus:

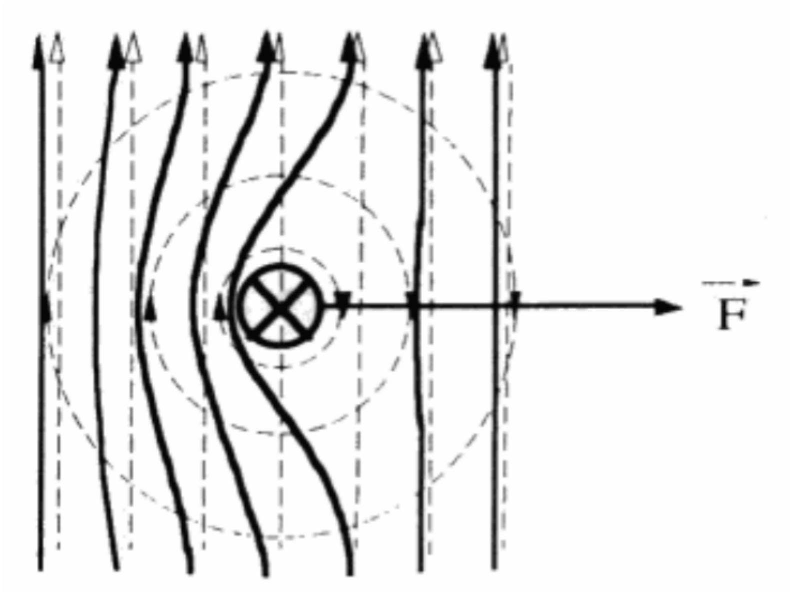


Abbildung 2.5: Die durchgezogenen Linien zeigen das resultierende Magnetfeld, wobei durch das Kreuz gekennzeichnet wird, dass der Leiter "in die Ebene" geht. Die gestrichelten Linien sind die einzelnen Magnetfelder.

Wie bereits erwähnt stossen sich nahe beieinanderliegende Feldlinien ab. Ausserdem sind die Feldlinien auf der rechten Seite nicht mehr ganz gerade und diese wollen, damit sie so kurz wie möglich sind, gerade werden. Es resultierend eine Kraft auf den Leiter, die Lorentz Kraft genannt wird. Man merke an, dass nicht nur ein Strom eine Kraft auf eine Kompassnadel bewirkt, sondern auch ein Magnet eine Kraft auf einen Stromdurchflossenen Leiter bewirkt. Dabei ist diese Kraft gegeben durch:

$$F_B = IlB\sin(\varphi) \Rightarrow \vec{F}_B = I\vec{l} \times \vec{B}$$

[75]Der technische Strom ist der Strom positiver Ladungen.

Wobei φ der Winkel zwischen Strom und Magnetfeldlinien ist. B beziehungsweise $\vec{B}$ ist die Magnetische Flussdichte und $\vec{l}$ beschriebt die Richtung in die der Strom fliesst. Sie beschriebt die Stärke eines magnetischen Feldes und ist gegeben durch:

$$B = \frac{F_B}{Il\sin(\varphi)}$$

Die Magnetische Flussdichte hat die SI-Einheit $[B] = \frac{N}{Am} = T$(Tesla)[76]. Falls nicht mit dem Vektorprodukt gerechnet wird, lässt sich die Kraftrichtung bestimmen durch die Drei-Finger-Regel. Dabei zeigt der Daumen in die Richtung des technischen Stroms, der Zeigefinder in Richtung des Magnetfeldes und der Mittelfinger in Richtung der Lorentzkraft F_B. Wenn nur einzelne Ladungsträger q durch ein Magnetfeld bewegt werden, so gilt intuitiv[77]:

$$I\vec{l} = q\vec{v}$$

Beziehungsweise für die Kraft auf dieses Teilchen:

$$F_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Dieser Ausdruck zeigt schön, dass wenn sich die Ladung nicht bewegt, diese Ladung auch keine magnetische Kraft erfahren kann. Der Grund dafür ist, dass nur eine sich Bewegende Ladung ein Magnetfeld erzeugen kann, welches wiederum mit einem Ladungsträger interagieren kann.

[76]Dabei ist eine Flussdichte von 1.0 Tesla schon relativ gross. Vergleichsweise hat das Magnetfeld der erde eine Flussdichte von ungefähr $50\mu T$. Ein herkömmliches Magnet ungefähr $0.1T$.

[77]Falls das nur ein Ladungsträger vorhanden ist, so kann der Strom geschrieben werden als $I = qv$. Um dann noch die Richtung beizubehalten wird v als $\vec{v}$ geschrieben.

2.9.4 Magnetischer Fluss

Der magnetische Fluss Ω ist eine Grösse dafür, wie viele Feldlinien durch eine bestimmte Fläche gehen. Diese Grösse ist gegeben durch:

$$\Omega$$

2.9.5 Induktion

Selbstinduktion

Spule

2.9.6 Maxwells Gleichungen

2.9.7 Energie des Elektromagnetischen Feldes

2.10 Wechselstrom

Wenn die elektrische Spannung periodisch oszilliert, lassen sich Phänomene beobachten, die bei Gleichstrom beziehungsweise konstanter Spannung nicht vorkommen. Im folgenden Kapitel werden Widerstände, Kondensatoren (auch Kapazitäten) und Induktoren (auch Spulen), sowie Kombinationen der Komponenten genauer betrachtet.

2.10.1 Satz von Fourier

Der Satz Fouriers besagt, dass eine jede periodische Funktion ($f(t) = f(t+T)$) durch eine Summe von Sinusfunktionen der Form $A\sin(Bt+C)+D$ beschrieben lässt. Falls man also weiss, wie sich ein Wechselstromkreis mit Sinusförmigem Wechselstrom verhält, so kann man Herleiten, wie sich ein jeder Wechselstrom verhält. Im folgenden wird also immer von Sinusförmigem Wechselstrom gesprochen.

2.10.2 Zeigerdiagramm - “Phasor”

Das Zeigerdiagramm ist eine graphische Darstellung, die unter anderem beim abstrahieren des Wechselstroms hilfreich sein kann. Dabei hilft das Diagramm, spätere Rechenaufgaben mit einfachen Geometrischen zusammenhängen zu vereinfachen. Die Abbildung 2.10.2 zeigt ein solches Zeigerdiagramm.

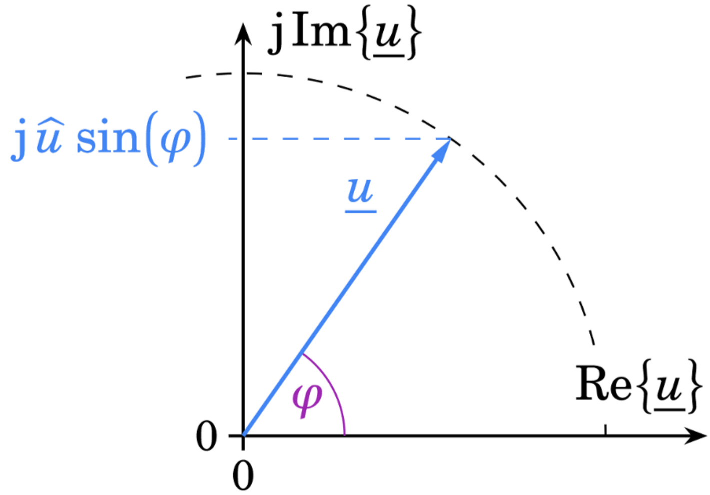


Abbildung 2.6: Zeigerdiagramm des Wechselstroms. Dabei befindet sich das Diagramm in der Komplexen Ebene.

Die Länge des hier blauen Pfeils gibt die Spannungsamplitude an. Der Winkel gibt dabei das Argument für den Sinus. Anders gesagt, ist die Höhe der Pfeilspitze die Spannung zu einem gewissen Zeitpunkt. Der ganze Pfeil dreht sich mit ωt.
Das Zeigerdiagramm wird auch später im Kapitel vorkommen, wenn zum Beispiel Impedanzen verbildlicht werden sollen.

2.10.3 Anmerkung zum Syntax

Um formale Fehler zu vermeiden werden von der Zeit abhängige Spannungen und Ströme mit Kleinbuchstaben ($U(t) = u, I(t) = i$) geschrieben. Dabei haben, wie im vorherigen Abschnitt2.10.1 erklärt, die Ströme beziehungsweise Spannungen folgende

Form:

$$U(t) = u = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u)$$
$$I(t) = i = \hat{\imath}\sin(\omega t + \varphi_i)$$

Dabei sind $\hat{u}$ beziehungsweise $\hat{\imath}$ die Amplituden[78] und φ_u beziehungsweise φ_i die Nullphasen.

Bei Wechselstrom ist es hilfreich sich der rechnerischen Schönheit komplexer Zahlen zu bedienen. Die komplexen Zahlen bieten eine effizientere alternative zu Vektoren. Es sei angemerkt, dass die komplexen Grössen grundsätzlich keine physikalische Bedeutung haben. Sie sind ein reines Recheninstrument. Komplexe Grössen werden typischerweise mit einem Unterstrich $\left(\underline{u}, \underline{i}, \underline{Z}, \underline{X}\right)$ markiert.

Die komplexe Spannung und der komplexe Strom lassen sich wie folgt beschreiben[79]:

$$\underline{u} = \hat{u}e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$
$$\underline{i} = \hat{\imath}e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

Dabei gilt, dass jeweils die Imaginärteile[80] die Spannungen und Ströme selbst sind[81].

$$u = \Im\left(\underline{u}\right) = \Im\left(\hat{u}e^{j(\omega t + \varphi_u)}\right) = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u)$$
$$i = \Im\left(\underline{i}\right) = \Im\left(\hat{\imath}e^{j(\omega t + \varphi_i)}\right) = \hat{\imath}\sin(\omega t + \varphi_i)$$

[78] Die Amplituden sind zeitunabhängig und könnten daher auch als $\hat{U}$ und $\hat{I}$ geschrieben werden. Wegen Ästhetik- und Gewohnheits-Gründen, präferiere **ich** die Kleinbuchstaben.

[79] Dabei verwendet man, um eine doppelte Belegung von i zu vermeiden, j für die komplexe Einheit ($j^2 = -1$).

[80] Der Imaginärteil selbst ist real und wird mit dem Fraktur-I ($\Im$) notiert.

[81] Dieser Zusammenhang lässt sich leicht anhand der Euler'schen Formel $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ erkennen.

2.10.4 Impedanz

Wie auch beim Gleichstromkreis hemmt ein Widerstand auch im Wechselstromkreis. Jedoch hemmen im Wechselstromkreis noch andere Komponenten, die im weiteren Verlauf genauer Diskutiert werden. Dabei kann gleich wie beim Gleichstrom der Widerstand berechnet werden als Quotient von Spannung durch Strom $\frac{u}{i}$. Dieser Widerstand ist Zeitabhängig und gibt daher keine gute Möglichkeit ein Bauelement in einem Stromkreis zu beschreiben. Stattdessen wird die Impedanz $\underline{Z}$ genutzt, der Quotient von komplexer Spannung durch komplexen Strom $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$.
Dabei lässt sich die Impedanz in zwei Komponenten aufteilen. Der Wirkwiderstand oder auch Resistanz ($R = \Re(\underline{Z})$) und Blindwiderstand oder auch Reaktanz ($X = \Im(\underline{Z})$). Der Begriff des Blindwiderstandes kommt daher, dass Komponenten mit reinem Blindwiderstand die Energie nur Speichern und nicht abgeben, so wie beispielsweise ein Ohm'scher Widerstand oder eine Glühbirne. Der Scheinwiderstand[82] $|Z| = |\underline{Z}|$ oder einfach Z beschreibt den Betrag der Impedanz. Dabei gilt für den Betrag, ähnlich wie bei Vektoren:

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{\Re(\underline{Z})^2 + \Im(\underline{Z})^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ ist gegeben durch:

$$\Delta\varphi = \arctan\frac{\Im(\underline{Z})}{\Re(\underline{Z})} = \arctan\frac{X}{R}$$

Sie beschreibt die Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom. Man erinnere sich daran, dass die Impedanz definiert ist als

$$\underline{Z} = \frac{u}{i} = \frac{\hat{u}e^{j(\omega t+\varphi_u)}}{\hat{i}e^{j(\omega t+\varphi_i)}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}e^{j(\varphi_u-\varphi_i)} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}e^{j\Delta\varphi}$$

[82] Da **ich** komplexe Grössen mit einem Unterstrich markiere könnte ich den Scheinwiderstand auch einfach als Z schreiben. Solange alle komplexen Grössen markiert werden, bringt das keine Probleme.

Das heisst auch, dass der Betrag der Impedanz, also der Scheinwiderstand gegeben ist durch $|\underline{Z}| = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}$. Diese Tatsache lässt sich auch graphisch bestätigen (mit zwei Sinuskurven für Spannung beziehungsweise Stromstärke). Die Impedanz ist also eine Grösse, die neben dem Betrag des Widerstandes auch die Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom gibt.

Das Zeigerdiagramm der Impedanz hilft dabei, jegliche zusammenhänge zu verstehen. Unter anderem erkennt man daran die Ähnlichkeit zwischen Vektoren und Komplexen Zahlen. Ausserdem wird klar, wieso die Phasendifferenz gegeben ist durch den Arkustangens oder weshalb bei einem Widerstand als einzige Komponente, die Phasendifferenz null ist.

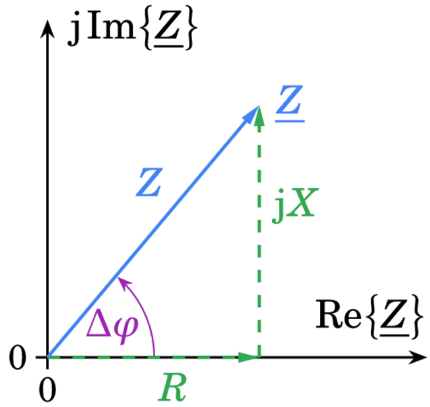


Abbildung 2.7: Zeigerdiagramm der Impedanz. Die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ gibt die Phasendifferenz zwischen Spannung und Stromstärke.

2.10.5 Ohm'scher Widerstand

Ein Ohm'scher Widerstand im Wechselstromkreis ist überraschend uninteressant. Für den Widerstand gilt auch $R = \frac{u}{i}$, wobei Strom und Spannung in Phase sind. Somit ist $\Delta\varphi = 0$ und die Impedanz eines Ohm'schen Widerstandes besteht aus reinem Wirkwiderstand.

2.10.6 Kondensator

Beim Kondensator sieht das ganze schon anders aus. Hier sind Strom und Spannung[83] nicht mehr in Phase. Intuitiv lässt sich das leicht erklären: Wenn Ladung auf dem Kondensator maximal ist, ist der Strom null und die Spannung maximal[84]. Das bedeutet, dass Die Spannung um eine viertel Periode, also $\frac{\pi}{2}$, dem Strom hinterher hinkt. Auch mathematisch lässt sich das schnell bestätigen dafür betrachte man die komplexe Spannung über einem Kondensator $\underline{u_C}$:

$$\underline{u_C} = \frac{1}{C}\int \underline{i}dt = \frac{1}{C}\int \hat{i}e^{j\omega t}dt = \hat{i}\frac{1}{j\omega C}e^{j\omega C} = \hat{i}\frac{1}{\omega C}e^{j(\omega t-\frac{\pi}{2})}$$

Man betrachte weiter die folgende komplexe Spannung:

$$\underline{u} = \hat{u}e^{j(\omega t+\Delta\varphi)}$$

Bei einem Vergleich der beiden Ausdrücke wird klar, dass

$$\hat{u} = \hat{i}\frac{1}{\omega C}$$

und

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

gelten muss. Die Impedanz lässt sich schreiben als

$$\underline{Z_C} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{i}} = \frac{\hat{i}\frac{1}{\omega C}e^{j(\omega t-\frac{\pi}{2})}}{\hat{i}e^{j\omega t}} = \frac{1}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\frac{1}{\omega C}$$

Somit ist die Impedanz ein reiner Blindwiderstand wobei gilt $X_C = \Im(\underline{Z_C}) = -\frac{1}{\omega C}$. Der Blindwiderstand wird mit X notiert. Ausserdem ist mit der berechneten Phasendifferenz klar, dass die Spannung de facto dem Strom hinterher hinkt.

[83]Es ist immer die Spannung über dem Komponenten gemeint.
[84]Das lässt sich leicht an einem Sinusgraphen bestätigen.

2.10.7 Spule

Für die Spule sind die gleichen Überlegungen zielführend. Für den Intuitiven Ansatz muss man sich klar machen, dass an einer Spule im Gleichstromkreis keine Spannung anliegt. Sie ist vom Prinzip her wie ein Leiter. Die einzige Spannung[85] die an einer Spule anliegt, ist die der Induktion. Weiter weiss man, dass die Selbstinduktionsspannung proportional zur Ableitung des Stroms ist. Sie ist gegeben durch

$$U_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$$

Dabei ist die Induktivität L positiv. Die Induktionsspannung zeigt genau in die andere Richtung wie die Spannung über der Spule, welche schlussendlich die einzige Spannung ist die gemessen werden kann.

$$U_L = -U_{ind} = L\frac{dI}{dt}$$

Mit einem Blick auf Sinuskurven und deren Ableitungen wird klar, dass die Spannung dem Strom hinterher läuft, wobei eine Phasendifferenz von $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu beobachten ist. Auch rechnerisch ergibt sich das gleiche Ergebnis[86]:

$$\underline{u_L} = L\frac{d}{dt}\left(\hat{i}e^{j\omega t}\right) = Lj\omega\hat{i}e^{j\omega t} = L\omega\hat{i}e^{j(\omega t+\frac{\pi}{2})}$$

Weiter kann man diesen Ausdruck mit der Spannung

$$\underline{u_L} = \hat{u}e^{j(\omega t+\Delta\varphi)}$$

[85] Da Supraleiter nicht alltäglich sind, hat eine Spule meist auch noch, wie alle andere Leiter einen Widerstand. Dieser kann oft vernachlässigt werden, auch wenn man bedenkt, dass durch die vielen Wicklungen ein, relativ zum normalen Leiter, grosser Widerstand bestehen kann. Das liegt daran, dass die Spannung durch die Induktion deutlich grösser ist.

[86] Hier wir Wechselstrom betrachtet.

vergleichen. Dabei wird schnell ersichtlich, dass gilt:

$$\hat{u} = L\omega\hat{i}$$

und für die Phasendifferenz gilt

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Die Impedanz lässt sich schreiben als

$$\underline{Z_L} = \frac{\underline{u_L}}{\underline{i}} = \frac{\hat{i}\omega L e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}}{\hat{i}e^{j\omega t}} = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L$$

Somit ist die Impedanz wieder ein reiner Blindwiderstand, wobei gilt $X_L = \Im(\underline{Z_L}) = \omega L$. Anders zur Impedanz einer Kapazität, zeigt die einer Induktivität in andere Richtung, läuft also dem Strom davon.

2.10.8 Impedanzen in Serie

Es gelten Kirchhoffs Stromkreisgesetze. Das bedeutet der Strom über alle Leiter ist gleich und die Spannungen über alle Komponenten summieren sich zu Null.

$$\underline{i} = \underline{i}_1 = \underline{i}_2 = ... = \underline{i}_n$$
$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + ... = \sum \underline{u}_K$$

Für die Impedanz gilt, genau wie beim Gleichstromkreis:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{i}_1} + \frac{\underline{u}_2}{\underline{i}_2} ... = \sum \underline{Z}_K$$

Der Scheinwiderstand ergibt sich aus dem Betrag der Impedanz. Dabei werden Resistanz und Reaktanz als die Beiden Komponenten[87] angesehen. Für den Betrag

[87] Wie bei Vektoren. Nur hier sind Imaginärteil und Realteil gemeint.

gilt also

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Rechengesetzte komplexer Zahlen und die oben besprochenen Eigenschaften der Serienschaltung erlauben folgende Schreibweise:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(X_L + X_C)^2 + R^2} = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$$

Dabei sind mit X_L, X_C und R jeweils die gesamten Anteile der jeweiligen Widerstandsarten gemeint. Der letzte Umformungsschritt muss mit Vorsicht genossen werden. Fall mehrere Spulen oder Kapazität verbaut sind, so müssen auch mehr Terme in der Klammer sein. Die Phasendifferenz ist gegeben durch $\Delta\varphi = \arctan\frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}{R^2}$.

2.10.9 Parallel geschaltete Impedanzen

Wir kennen aufgrund der Kirchhoff'schen Gesetzte folgende Bedingungen für Parallele Schaltungen:

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \ldots = \sum \underline{i}_K$$
$$\underline{u} = \underline{u}_1 = \underline{u}_2 = \ldots = \underline{u}_n$$

Erneut lässt sich die Impedanz, ähnlich wie bei Gleichstromschaltungen ausdrücken durch:

$$\underline{Z}^{-1} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{u}_1} + \frac{\underline{i}_2}{\underline{u}_2} \ldots = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \ldots = \sum \frac{1}{\underline{Z}_K}$$

Der gleiche Ausdruck kann auch geschrieben werden durch:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\sum \frac{1}{\underline{Z}_K}}$$

In dem Fall, dass ein Widerstand, eine Spule und ein Kondensator parallel geschaltet ist, lässt sich die Gesamtimpedanz bestimmen durch:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C - \frac{j}{\omega L}}$$

Weiter lässt sich der Kehrwert des Scheinwiderstands berechnen durch:

$$Z^{-1} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \Rightarrow Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

Die Phasendifferenz lässt sich dann bestimmen durch $\Delta\varphi = \arctan(R\omega C - R\frac{1}{\omega L})$. Ein solcher Stromkreis ist unter dem Namen Sperrkreis bekannt. Das liegt daran, dass je nach Frequenz eine Komponente (Spule oder Kapazität) bevorzugt wird, der andere wird demnach "gesperrt".

2.10.10 Kombination von Parallel- und Serienschaltung

Bei einer Kombination von Parallel- und Serienschaltung kann wieder die gleiche Methode wie beim Gleichstrom verwendet werden. Also alternierendes berechnen von Serie- und Parallelschaltungen. Anders als beim Gleichstrom muss man hier beachten, dass dann mit zweidimensionalen Komplexen Zahlen gerechnet wird. Wenn man dabei eine zweidimensionale Impedanz als "Teil-Ersatzwiderstand" hat, kann es zu Problemen kommen. Es entsteht ein sehr mühselige Rechnung, die durch Bruchaddition und Erweiterung mit dem Konjugiert Komplexen gelöst werden kann.

Beispiel - $R + C||L||R$

In der Abbildung 2.8 wird ein Wechselstromkreis dargestellt, der als Beispiel gelten soll[88].

[88] Die Grafik wurde von mir, mit der Web-App "Lucidchart" erstellt.

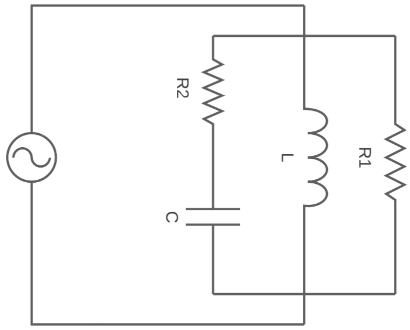


Abbildung 2.8: Wechselstromkreis: Es sind Widerstand R_2 und Kapazität C seriell geschaltet. Parallel dazu sind eine Spule L und ein Widerstand R_1.

Man kann die Impedanz folgendermassen ausdrücken.

$$\underline{Z} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_{R_1}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R_2 - \frac{j}{\omega C}} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_1}\right)^{-1}$$

Weiter kommt man nur mit mühsamer Bruchaddition. Das Ergebnis sieht folgendermassen aus:

$$\left(\frac{1}{R_2 - \frac{j}{\omega C}} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_1}\right)^{-1} = \left(\frac{j\omega L R_1 + R_1\left(R_2 - \frac{j}{\omega C}\right) + j\omega L\left(R_2 - \frac{j}{\omega C}\right)}{j\omega R_1\left(R_2 - \frac{j}{\omega C}\right)}\right)^{-1}$$

Nach noch mühseligeren Umformungen und einer hohen Chance auf Flüchtigkeitsfehler ergibt sich folgender Ausdruck[89]:

$$\underline{Z} = \left(\frac{\frac{L^2}{C^2}R_1 + \omega^2 L^2 R_1^2 R2 + \omega^2 L^2 R_1 R_2^2 + j\frac{\omega L^2}{C}R_1^2 - j\frac{L}{\omega C^2}R_1^2 - j\omega L R_1^2 R_2^2}{\frac{L^2}{C^2}R_1^2 + \omega^2 L^2 R_1^2 R_2^2}\right)^{-1}$$

Ab hier kann man nur hoffen, man hat keine fehler gemacht. Weiter könnte man ganz normal den Scheinwiderstand, Phasenverschiebung et cetera berechnen. Diese Rechnung soll als Illustration gelten und zeigen, dass das Rechnen im Komplexen schnell sehr unangenehm werden kann.

[89] Hier hat man, wie bereits angekündigt, mit dem konjugiert Komplexen erweitert.

2.10.11 Schwingkreise

Schwingkreise, sind Stromkreise, wobei die Ladung auch ohne Quellspannung zwischen Komponenten oszilliert. Hauptanwendungen sind Filter[90] und Kompensationen von Blindstrom.

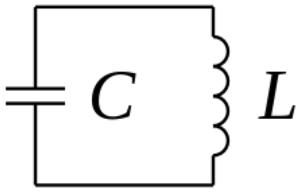


Abbildung 2.9: Einfacher idealer Schwingkreis mit Spule und Kondensator.

Wenn zu Beginn der Kondensator geladen ist und der Ohm'sche Widerstand als Null approximiert wird, so Schwingt die Ladung. Bei einem einfachen geladenen Kondensator, wird die Entladung entschleunigt. Die Ladung auf dem Kondensator kann nach einer Zeit t folgendermassen berechnet werden:

$$Q = CU_{C,0}e^{\frac{t}{\tau}} Q = CU_{C,0}e^{\frac{t}{RC}}$$

Dabei wird τ Zeitkonstante genannt und sie ist gegeben durch $\tau = RC$. An dieser Gleichung für die Entladung, wird schnell ersichtlich, dass ohne einen Widerstand, diese Entladung sehr schnell ist.
Jetzt muss aber die Lenz'sche Regel an der Spule beachtet werden, die vorgibt, dass eine induzierte Spannung beziehungsweise ein induzierter Strom immer die Ursache hemmt. Diese beiden Tatsachen kombiniert führen zur Schwingung. Dabei ist die Ladung auf einer Kondensatorplatte und somit auch die Spannung über die beiden Platten gegeben durch eine Kosinuskurve.

[90] Näheres dazu später.

2.10.12 Effektivwerte und Leistung

Gesucht ist die mittlere Leistung bei Wechselstrom.

$$\begin{aligned}
P = \overline{p} &= \frac{1}{T}\int_0^T u i dt \\
&= \frac{\hat{u}\hat{i}}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\cos(\omega t + \Delta\varphi) dt \\
&= \frac{\hat{u}\hat{i}}{T}\left(\int_0^T \cos^2(\omega t)\cos(\Delta\varphi) dt + \int_0^T \cos(\omega t)\sin(\omega t)\sin(\Delta\varphi) dt\right) \\
&= \frac{\hat{u}\hat{i}}{T}\cos(\Delta\varphi)\int_0^T \cos^2(\omega t) dt - \frac{\hat{u}\hat{i}}{2T}\sin(\Delta\varphi)\int_0^T \sin(2\omega t) dt \\
&= \frac{\hat{i}\hat{u}}{2}\cos\Delta\varphi
\end{aligned}$$

Dabei wurde der Kosinus anstatt des Sinus verwendet im trigonometrische Beziehungen einfacher zu sehen. Dabei wurde $\cos(\omega t + \Delta\varphi) = \cos(\omega t)\cos(\Delta\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\Delta\varphi)$ und $\sin(\omega t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\sin(2\omega t)$ verwendet. Das erste Integral ist dabei $\frac{T}{2}$ und das zweite null.

Dieses Ergebnis zeigt, dass die Leistung bei konstanter Spannungs- und Stromamplitude von der Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ abhängig ist. Konkret ist die Leistung bei einer kleinen Phasendifferenz maximal und bei einer Phasendifferenz von $\pm\frac{\pi}{2}$ minimal. Das führt wieder auf den Abschnitt 2.10.4 zurück. Bei einem Kondensator oder einer Spule wird keine Energie umgesetzt. Sie wird nur temporär gespeichert.

Effektivwerte

Weiter werden Effektivwerte der Spannung und des Stroms so definiert, dass $P = U_{eff} I_{eff} \cos(\Delta\varphi)$ gilt. Aus $\overline{p} = \frac{\hat{i}\hat{u}}{2} \cos \Delta\varphi$ folgt[91]:

$$U_{eff} = \hat{u}\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$I_{eff} = \hat{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Die Effektivwerte nennt man auch RMS (root mean square). Echte Geräte sind oft nur mit dem RMS angeschrieben. Beispielsweise ist die Netzspannung $U_{eff} = 230V$ das Bedeutet, die Spannungsamplitude an einer Steckdose ist $\hat{u} = 230V\sqrt{2} \approx 325V$. Ausserdem gilt für die Scheinimpedanz:

$$|\underline{Z}| = Z = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$$

Wirk-, Blind- und Scheinleistung

Wenn man einen Strom $i = \hat{i}\cos(\omega t)$ und eine Spannung $u = \hat{u}\cos(\omega t + \Delta\varphi)$ genauer betrachtet, so kann man die Spannung umschreiben als:

$$u = \hat{u}(cos(\omega t)\cos(\Delta\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\Delta\varphi))$$

Dieser Term kann nun Interpretiert werden als eine Superposition von Oszillierendem Sinus und Kosinus, mit Amplituden $-\hat{u}\sin\Delta\varphi$ und $\hat{u}\cos\Delta\varphi$. Der Teil mit dem Kosinus ist in Phase mit dem Strom und führt darum zu einer Wirkleistung[92]. Der Term mit dem Sinus hingegen verrichtet keine Arbeit[93]. Diese Leistung wird

[91] Diese Aussage über die mittlere Leistung gilt nur bei Sinusförmigem Wechselstrom. Daher sind auch die Effektivwerte nur für Sinusförmigen Strom definiert.

[92] Für einen genaueres Verständnis können Kosinus-Quadrat Kurven betrachtet werden. Das Intergal einer Kosinus-Quadrat Funktion ist Positiv. Das bedeutet es wird elektrische Arbeit verrichtet.

[93] Das Integral unter der Funktion $-\sin(x)\cos x$ ist null. Es wird also keine Arbeit verrichtet. Dieser Term steht für die Oszillation der Energie zwischen Quelle und Komponente.

Blindleistung genannt. Sie wird mit

$$Q = U_{eff} I_{eff} \sin(\Delta\varphi)$$

beschrieben. Ausserdem ist die Scheinleistung die totale Leistung die zwischen Quelle und Komponente ausgetauscht wird. Sie ist ähnlich simple wie die Scheinimpedanz ($Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$) gegen durch:

$$S = U_{eff} I_{eff}$$

Mithilfe von trigonometrischen Beziehungen erhält man folgende Gleichung:

$$S^2 = Q^2 + P^2$$

Allgemein will man so wenig Blindwiderstand wie möglich. Dieser führt nur dazu, dass mehr Strom notwendig ist um die gleiche Arbeit zu erledigen, was wiederum zu einem grösseren Energieverlust über die Leiter führt. Um eine Phasenverschiebung von $\Delta\varphi$ zu erreichen kann man einfach eine Spule oder eine Kapazität mit passender Impedanz in den Kreis einsetzen, so dass die Reaktanz null wird.

2.11 Spezielle Relativitätstheorie

2.12 Quantenmechanik

2.13 Datenauswertung

In den Naturwissenschaften geht es immer darum, die Theorie mit praktischen Beobachtungen zu vergleichen. Dabei ergibt es Sinn, Experimente zu machen. Das Problem bei Experimenten ist, dass das beobachtete Verhalten meistens nicht genau dem erwarteten Verhalten gleicht. Rauschen, Messfehler und Vereinfachungen können dann ersichtlich werden. Darum ist es nötig, die Ausmasse von Messfehlern beschreiben zu können. Dieses Kapitel wird sich mit Methoden der Datenauswertung widmen. Dabei sei angemerkt, dass die verwendeten Grössen historisch oft genutzt sind und die Literatur diesen Syntax vorschlägt. Es lohnt sich nicht, den Sinn einzelner Grössen gross zu hinterfragen, da es sich dabei meistens um reine Formalitäten handelt.

2.13.1 Messfehler - precision and accuracy

Man unterscheidet zwei unterschiedliche Arten von Messfehlern.

1. **Willkürliche Fehler** können nicht vermieden werden. Gründe dafür sind begrenzte Präzision der Messgeräte. Beispielsweise gibt es in Voltmeter einen "Jitter" der keine präzise Ablesung der Spannung erlaubt. Ein anderes Beispiel ist ein Massband, wobei maximal im $10^{-}4m$ Bereich gemessen werden kann. Willkürliche Fehler sind bei einer grossen Anzahl Datensätze nicht allzu schlimm, da sich der Mittelwert dem tatsächlichen Wert annähern wird. Man spricht von der "precision" oder Präzision.

2. Bei **Systematischen Fehlern** wird der falsche Wert gemessen. Beispielsweise könnte der Voltmeter falsch angeschlossen sein. Ein anderes Beispiel, wäre eine Uhr die zu schnell läuft. Der gemessene Wert entspricht nicht dem wahren Wert. Systematische Fehler sind wenn möglich zu vermeiden, da auch mit mehreren Messungen, der gemessene Wert nie dem wahren Wert entsprechen wird. Man spricht von der "accuracy" oder zu deutsch Genauigkeit.

2.13.2 Durchschnitt und Median

In den meisten Fällen ist der Durchschnitt, auch arithmetisches Mittel, die beste Annäherung an den tatsächlichen Wert. Das arithmetische Mittel $\overline{x}$ ist folgendermassen

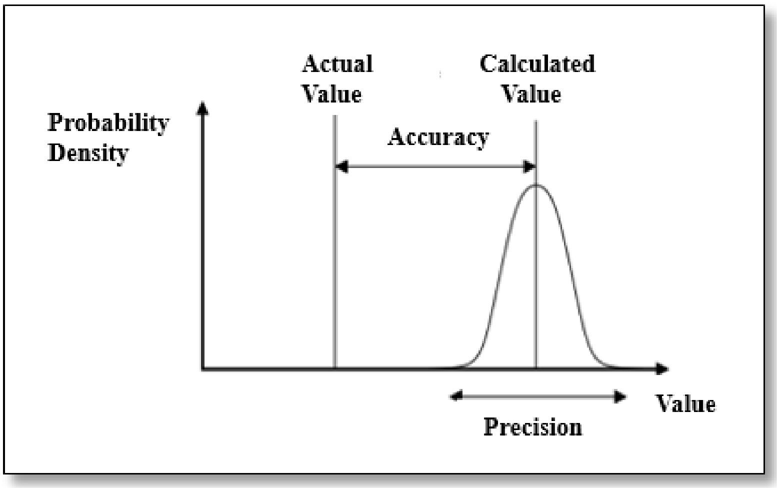


Abbildung 2.10: Schematische Darstellung von Messfehler. Wichtig anzumerken ist, dass die Genauigkeit ("accuracy") das grössere Problem ist, da mehrere Messungen das Problem nicht beheben.

definiert:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Dabei werden n Messungen durchgeführt und x_i sei die i-te Messung.

Falls der Durchschnittwert von einigen wenigen "Aussenseiter" stark beeinflusst wird, könnte der Median eine passendere Beschreibung der Daten sein. Dabei gilt für eine ungerade Anzahl Messungen n

$$\tilde{x} = x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$

und für eine gerade Anzahl Messungen n

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}\left(x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{2}+1\right]}\right)$$

Dabei ist wichtig anzumerken, dass die Daten der grösse nach sortiert sind[94].

[94]Für den Median ist es nicht wichtig, ob $i = n$ die kleinste oder grösste Messung ist

3 Formelsammlung

Um die wichtigsten Formeln in jedem Kapitel nicht mühsam zusammenzusuchen, soll dieses Kapitel als Formelsammlung gelten. Dabei sind vorläufig auch Formeln zu finden, die nicht explizit diskutiert wurden.[1]

[1] *Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher.* - Albert Einstein

3.1 Mechanik I

Beschleunigte Bewegungen

Position: $x(t) = x_0 + v_{x,0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

Geschwindigkeit: $v(t) = \dot{x}(t) = v_{x,0} + a_x t$

Beschleunigung: $a_x(t) = a_x = konst.$

Geschwindigkeit ohne t: $v_x^2 = v_{x,0}^2 + 2a_x(x - x_0)$

Position ohne a_x: $x = x_0 + \frac{v_x + v_{x,0}}{2}t$

Schiefer Wurf

Höhe über Referenz: $y = \sin(\alpha_0)v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

Horizontale Entfernung: $x = \cos(\alpha_0)v_0 t$

Höhe ohne t: $y = x\tan\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2$

Höchster Punkt: $y_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha_0}{2g}$

Weitester Punkt auf der Starthöhe: $x_w = \frac{v_0^2\sin(2\alpha_0)}{g}$

Impuls und Stösse

Impuls:	$\vec{p} = \vec{v}m$
Voll elastischer Stoss:	$\vec{v}_{a,2} = \dfrac{(m_a - m_b)\vec{v}_{a,1} + 2m_b\vec{v}_{b,1}}{m_a + m_b}$
	$\vec{v}_{b,2} = \dfrac{(m_b - m_a)\vec{v}_{b,1} + 2m_a\vec{v}_{a,1}}{m_b + m_a}$
Voll inelastischer Stoss:	$\vec{v}_{a,2} = \vec{v}_{b,2} = \dfrac{m_a\vec{v}_{a,1} + m_b\vec{v}_{b,1}}{m_a + m_b}$
Energieverlust:	$\Delta E_{kin} = -\dfrac{m_a m_b(\vec{v}_{a,1} - \vec{v}_{b,1})^2}{2(m_a + m_b)}$

Gleichförmige Kreisbewegung

Winkelgeschwindigkeit:	$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$
Bahngeschwindigkeit:	$v = \omega r$
Zentripetalbeschleunigung	$a_Z = \omega^2 r = \dfrac{v^2}{r}$
Zentripetalkraft:	$F_Z = m a_Z$

Keplers Gesetze

Kepler I:	Die Planetenbahn ist eine Ellipse.
Kepler II:	$\dfrac{A}{\Delta t} = konst.$
Kepler III:	$\dfrac{r^3}{T^2} = G\dfrac{M}{4\pi^2} = konst.$

3.2 Mechanik II

Drehbewegungen

Drehmoment:	$I = \sum_i m_i r_i^2$
Rotationsenergie:	$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$
Kepler II:	$\frac{A}{\Delta t} = konst.$

3.3 Thermodynamik

Längenausdehnung:	$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T$
Volumenausdehnung:	$\Delta V = 3\alpha V_0 \Delta T = \gamma V_0 \Delta T$
Stoffmenge:	$n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}$
Zustandsgleichung ideales Gas:	$pV = nRT = Nk_BT$
Mittlere Translationsenergie:	$\overline{E}_{kin} = \frac{1}{2}m\overline{v}^2 = \frac{3}{2}k_BT$
Mittlere Teilchengeschwindigkeit:	$\overline{v} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$
Äquipartitionstheorem:	$\overline{E} = \frac{f}{2}k_BT$
Innere Energie:	$U = N\frac{f}{2}k_BT = n\frac{f}{2}RT$
1. Hauptsatz:	$\Delta U = W + Q$
Gaskonstante:	$R = c_p - c_V$
Wärmemengen:	$Q_w = cm\Delta T$
	$Q_f = L_f m$
	$Q_v = L_v m$
Wärmeleitung	$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}$
Wärmestrahlung	$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \epsilon\sigma A T^4$
Reale Gase:	$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$

3.4 Schwingungen und Wellen

3.5 Optik

Geometrische Optik

Reflexionsgesetz:	$\alpha' = \alpha$
Snellius'sches Brechnungsgesetz:	$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$
Brechungsindex:	$n = \frac{c}{v}$
Bedingung für Totalreflexion:	$\alpha_2 \geq \frac{\pi}{2}$
Wellenlänge im Medium:	$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{nf}$

Phänomene der Huygens'schen Optik

Bedingung für starke Beugung:	$d \approx \lambda$
Maxima bei Doppelspalt:	$d\sin(\theta_n) = n\lambda$
Minima bei Doppelspalt:	$d\sin(\theta_n) = \frac{2n+1}{2}\lambda$
Phasenverschiebung:	$\delta = \frac{\Delta l}{\lambda}2\pi = \frac{d}{\lambda}\sin(\theta)\cdot 2\pi$
Maxima bei N-fach Spalt:	$\delta_n = n\cdot 2\pi$
Minima bei N-fach Spalt:	$\delta_n = \frac{n}{N}2\pi$
Intensitätsverteilung N-fach Spalt:	$I = I_0\left(\frac{\sin\left(N\frac{d}{\lambda}\sin(\theta)\pi\right)}{\sin\left(\frac{d}{\lambda}\sin(\theta)\pi\right)}\right)^2$
Intensitätsverteilung am Gitter:	$I = I_0\left(\frac{\sin\left(N\frac{d}{\lambda}\sin(\theta)\pi\right)}{\sin\left(\frac{d}{\lambda}\sin(\theta)\pi\right)}\right)^2\left(\frac{\sin\left(\frac{D}{\lambda}\sin(\theta)\pi\right)}{\frac{D}{\lambda}\sin(\theta)\pi}\right)^2$
Rayleigh'sches Auflösungskriterium:	$\alpha \geq \alpha_K = 1.22\frac{\lambda}{D} = \frac{\Delta x_{min}}{L}$

3.6 Fluiddynamik

Auflagedruck:	$p = \frac{F_\perp}{A}$
Hydrostatischer Druck:	$p = p_0 + \rho_{fl}gh$
Barometrische Höhenformel:	$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0}\cdot h}$
Auftrieb:	$F_A = V\rho_{fl}g$
Bernoulli Gleichung:	$\frac{v^2}{2}\rho + \rho gh + p = konst$

3.7 Elektrostatik

3.8 Gleichstrom

3.9 Magnetismus und Induktion

3.10 Wechselstrom

Stromstärke:	$i = \Im\left(\underline{i}\right) = \Im\left(\hat{i}e^{j\omega t}\right) = \hat{i}\sin(\omega t)$
Spannung:	$i = \Im\left(\underline{u}\right) = \Im\left(\hat{u}e^{j(\omega t+\Delta\varphi)}\right) = \hat{u}\sin(\omega t + \delta\varphi)$
Impedanz:	$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}e^{j(\omega t+\Delta\varphi)}}{\hat{i}e^{j\omega t}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}e^{j\Delta\varphi}$
Impedanz an Widerstand:	$\underline{Z}_R = R$
Impedanz an Kondensator:	$\underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C}$
Impedanz an Spule:	$\underline{Z}_L = j\omega L$
Scheinwiderstand:	$Z = \lvert\underline{Z}\rvert = \sqrt{\Re(\underline{Z})^2 + \Im(\underline{Z})^2} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$
Resistanz:	$R = \Re(\underline{Z})$
Reaktanz:	$X = \Im(\underline{Z})$
Phasenverschiebung:	$\Delta\varphi = \arctan\frac{\Im(\underline{Z})}{\Re(\underline{Z})}$
Serieschaltung:	$\underline{Z} = \sum_i \underline{Z}_i$
	$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$
Parallelschaltung:	$\underline{Z} = \left(\sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i}\right)^{-1}$
Nutzleistung	$P = \overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T u i dt = \frac{\hat{u}\hat{i}}{2}\cos\Delta\varphi = U_{eff}I_{eff}\cos\Delta\varphi$
Blindleistung	$Q = \frac{\hat{u}\hat{i}}{2}\sin\Delta\varphi = U_{eff}I_{eff}\sin\Delta\varphi$
Scheinleistung	$S = \frac{\hat{u}\hat{i}}{2} = U_{eff}I_{eff} = \sqrt{P^2 + Q^2}$

3.11 Spezielle Relativitätstheorie

3.12 Quantenmechanik

3.13 Datenauswertung

Durchschnittswert:	$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Median - ungerade:	$\tilde{x} = x_{[\frac{n+1}{2}]}$
Median - gerade:	$\tilde{x} = \frac{1}{2}\left(x_{[\frac{n}{2}]} + x_{[\frac{n}{2}+1]}\right)$
Varianz:	$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$
Standartabweichung:	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
relative Standartabweichung:	$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}}$

4 Danksagung

Hiermit bedanke ich mich von ganzem Herzen bei dem Organisationskomitee der diesjährigen Physikolympiade. Das Event hat mir eine Möglichkeit gegeben, ausserhalb der Schule eine Faszination für die Physik zu entwickeln. Ausserdem sind die Begegnungen und neu geflochtene Freundschaften mit Gleichgesinnten Gold wert.

Weiter bedanke ich mich ganz herzlich bei Dr. Florian Leupold der mir als Lehrer und Ansprechpartner galt. Die Möglichkeit Fragen kompetent beantwortet zu bekommen hat mir einige Knoten lösen können.

Zu guter Letzt bedanke ich mich hiermit bei Freunden und Familie. Ohne diese Unterstützung wäre der ganze Prozess, wenn überhaupt, nur halb so befriedigend.