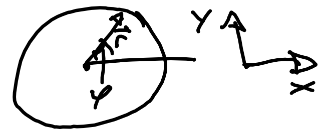
Kreisbewegung mit $\omega = \text{konst.}$ 19.09.24

Winkel: $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$



$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \sin(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \omega r \begin{pmatrix} -\sin(\omega t + \varphi_0) \\ \cos(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix} \Rightarrow v = \omega r$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 r \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \sin(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix} \Rightarrow a_z = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Beachte, dass $\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$ und $\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$.
Es sind also $\vec{v} \perp \vec{r}$ und $\vec{v} \perp \vec{a}$. Man sieht an $-\omega^2 r$, dass $\vec{a}$ in die Entgegengesetzte Richtung von $\vec{r}$ zeigt.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{und} \quad T^{-1} = f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r}$$

Vektoriell gilt:

indirekt

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{1}{\rho^2}(\vec{\rho} \times \vec{v})$$

Radius

$\Rightarrow \vec{\omega}$ steht senkrecht zu $\vec{\rho}$ und $\vec{v}$, zeigt also in/aus der Drehebene

Kreisbewegung mit α = konst. 24.9.24

Die Winkelbeschleunigung $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ sei konstant.

Die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ ist dann gegeben durch

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \quad \text{mit} \quad \vec{r}(t) = r\begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2) \\ \sin(\varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2) \end{pmatrix}$$

gilt für $\vec{a}(t)$ nach zweimal ableiten folgendes:

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \underbrace{r\alpha\begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix}}_{\vec{a}_{\parallel}} \underbrace{- r\omega^2\begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}}_{\vec{a}_{\perp}} \qquad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

man sieht, dass wenn $\alpha = 0$ die Gleichung für die Zentripetalbeschleunigung Gilt. Für die Beträge gelten

$$\left.\begin{aligned} |\vec{a}_{\parallel}| &= r\alpha \\ |\vec{a}_{\perp}| &= r\omega^2 \end{aligned}\right\} |\vec{a}| = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Allgemeine Beschleunigung parallel/senkrecht

24.9.24

Die Beschleunigung kann allgemein in zwei Teile aufgeteilt werden. In einen Teil, der parallel zur Bewegungsrichtung $\vec{v}$ ist und einen der senkrecht dazu ist.

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{\perp}(t) + \vec{a}_{\parallel}(t)$$

aus $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ und $\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{e}_{\parallel}(t)$ folgt

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_{\parallel}(t) &= \vec{e}_{\parallel}(t)\,\frac{dv(t)}{dt} \\ \vec{a}_{\perp}(t) &= v(t)\,\frac{d\vec{e}_{\parallel}(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \vec{a} \neq 0 :$$

- $v(t)$ ändert sich mit t
- $\vec{e}_{\parallel}(t)$ ändert sich mit t
- beides

$$\vec{a}(t) = \dot{v}\,\vec{e}_{\parallel}(t) + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{e}_{\perp}(t)$$

~~mR~~ verschieden Grösse berechnen

Impuls & Impulserhaltung 24.9.24

Der Impuls ist gegeben durch das Produkt von Masse & Geschwindigkeit:

$p = mv$ bzw $\vec{p} = m\vec{v}$

Grundsätzlich ist der Impuls in einem abgeschlossenen System immer erhalten:

$$P_{tot(vorher)} = P_{tot(nachher)}$$

Dabei ist P_{tot} bzw $\vec{P}_{tot}$ die Summe aller N Impulse $\vec{p}_i$:

$$\vec{P}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \begin{pmatrix} P_{tot,x} \\ P_{tot,y} \\ P_{tot,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{konstant.}$$

$\Rightarrow$ Der Masse-Schwerpunkt ist unbeschleunigt in einem abgeschlossenen System

1, 2 & 3 Newtonsches Gesetz 26.9.24

Inertialsystem

1) Trägheitsprinzip: Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, wenn die auf ihn wirkende resultierende Kraft verschwindet.

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \overset{m\ \text{konst.}}{\Rightarrow} \frac{dv}{dt} = 0$$

2) Kraftgesetz: Die Kraft auf einen Körper der Masse m ist gegeben durch

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \underset{m = \text{konst.}}{=} m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Wenn mehrere Kräfte $\vec{F_i}$ auf einen Körper wirken ist die resultierende Kraft gegeben durch

$$\vec{F_{res}} = \sum_i \vec{F_i}$$

3) Aktion = Reaktion: Zu jeder Aktion gehört eine gleich grosse Gegenreaktion, die den selben Betrag aber die entgegengesetzte Richtung hat.

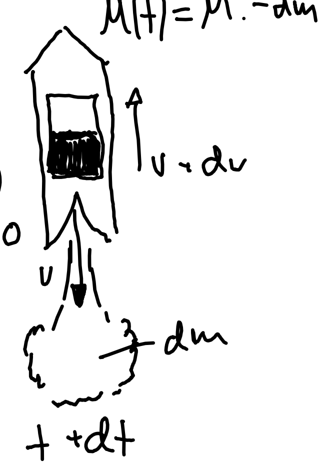
Impulserhaltung: $\vec{p}_{ges} = \vec{p_a} + \vec{p_b} = \text{konst}$

$$\frac{d\vec{p}_{ges}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{p_a}}{dt}}_{\vec{F_a}} + \underbrace{\frac{d\vec{p_b}}{dt}}_{\vec{F_b}} = 0$$

$$\vec{F_a} + \vec{F_b} = 0$$

Raketenantrieb 26. 9. 24

M : Masse von Rakete + Gas
M(t) : Masse der Rak. zu Zeit t
dm : Masse des Gases (weg)
v : Geschwindigkeit der Rak.
u : austrittsgesch. relativ zur Rakete
dv : veränderung der Geschwind



$$p(t+dt) = (M - dm)\cdot(v + dv) + dm(v-u)$$ dmdv ist vernachlässigbar

$$= Mv + Mdv - udm$$

$$p(t+dt) - p(t) = Mdv - udm = 0$$ 3.N.A

$$\Rightarrow \underbrace{M\frac{dv}{dt}}_{\text{Kraft}} = u\frac{dm}{dt} = F$$ Schubkraft

$\Rightarrow$ über die Zeit integriert und mit verwendung von $\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$ gilt:

$$\Delta v = v(t+dt) - v(t) = -u \ln\left(\frac{M_0 - m}{M_0}\right)$$

$\Delta v \geq u \Rightarrow$ Ausgestossenes Gas bewegt sich weg von einem ruhenden Betrachter

Gravitationsfeld der Erde (Approx $h \ll R_E$) 8.10.24

Die Gravitationsbeschleunigung der Erde ist gegeben durch

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G}{m} = -G_N \frac{M}{R_E^2} \hat{r}$$

↳ Dabei ist anzumerken, dass die Formel grundsätzlich für einen Massepunkt im Zentrum der Erde gilt. Man kann jedoch beweisen, dass es mathematisch gesehen genau ist. ⇝ keine Approximation.

Dabei ist die Erdbeschleunigung im Nähefeld der Erde gegeben durch:

$$g = G_N \frac{M}{R_E^2} = 9.81 \frac{m}{s^2} \simeq 10 \frac{m}{s^2}$$

Die Beschleunigung abhängig von der Höhe ist:

$$g(h) = G_N \frac{M}{(R_E+h)^2} = G_N \frac{M}{R_E^2} \left[\frac{1}{(1+\frac{h}{R_E})^2} \right] = g \left[\frac{1}{(1+\frac{h}{R_E})^2} \right]$$

mit $(1+x)^n \simeq 1+nx$ für $x \ll 1$ lässt sich dieser obige Ausdruck für $R_E \gg h$ vereinfachen:

$$g(h) \simeq g\left[1 - 2\frac{h}{R_E}\right] \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} h \sim 1m \\ R_E \sim 6400 km \end{array}\right\} \frac{h}{R_E} \sim 10^{-6}$$

Beschleunigte Bezugsysteme $\vec{r}(t), \vec{v}(t), \vec{a}(t)$ 10.10.24

mit

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{e}_{x'}(t) + y'\vec{e}_{y'}(t) + z'\vec{e}_{z'}(t)$$

$$\vec{v}'(t) = \dot{x}'(t)\vec{e}_{x'}(t) + \dot{y}'(t)\vec{e}_{y'}(t) + \dot{z}'(t)\vec{e}_{z'}(t)$$

Und der Tatsache, dass

$$\dot{\vec{e}}_{\parallel} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{\parallel}$$

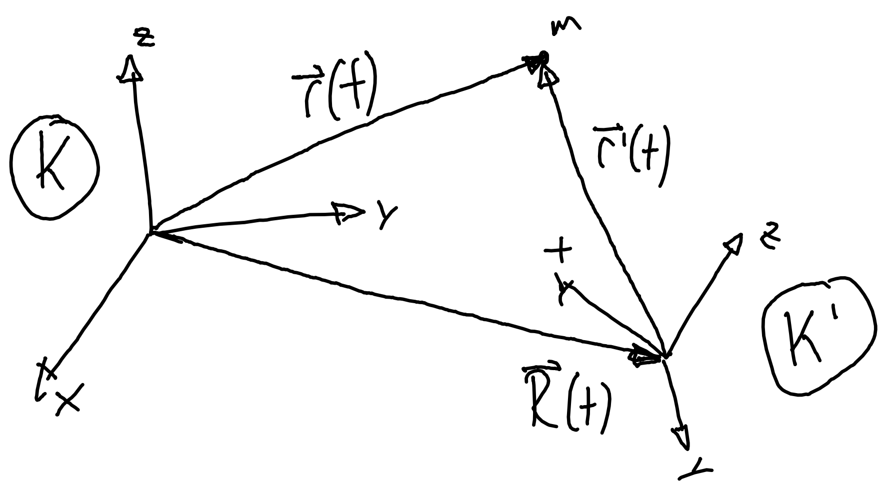
gilt mit Ableiten und anwendung der Produktregel

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}'(t)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{A}(t) + \vec{a}'(t) + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugal}}$$

Skizze



Scheinkräfte

10.10.24

In einem Inertialsystem gilt $\vec{F} = m\vec{a}$.

Der einfache Ausdruck $\vec{a}$ wird, relativ kompliziert, wenn man ihn aus der Sicht eines nicht-inertialsystem. ausdrücken muss:

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

Aus der Sicht eines nicht Inertialsystems, gibt es also noch zusätzliche Terme, welche als Scheinkräfte beobachtet und gemessen werden können.

Es gilt aber immernoch, dass zwei "echte" - physikalische Kräfte

$$\vec{F}' = \vec{F} = m\vec{a}$$

Mit dem oben geschriebenen Ausdruck für $\vec{a}$ gilt

$$m\vec{a}' = \vec{F}' - m\vec{A} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

Dabei wird

$\vec{F}_T = -m\vec{A}$: Trägheitskraft

$\vec{F}_C = -2\vec{\omega}\times\vec{v}'$: Corioliskraft

$\vec{F}_{ZF} = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$: Zentrifugalkraft

Diese Kräfte ohne physikalisch Grundlegende Wechselwirkung werden Scheinkräfte genannt.

Scheinkräfte: keine äusseren Kräfte

10.10.24

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = m\vec{a_e} = m\vec{a}' - m\vec{a_T} - m\vec{a_C} - m\vec{a_{ZF}}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}' = \vec{a_T} + \vec{a_C} + \vec{a_{ZF}}$$

Bsp: Rotation in einer Ebene

$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ Anfangsbedingung: $\vec{v}'(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{F_C}$ und $\vec{F_{ZF}}$ müssen berücksichtigt werden. $\vec{F_T} = 0$.

↳ System ruht, dreht sich aber.

$$m\vec{a_C} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -2m\omega \begin{pmatrix} \dot{y}' \\ -\dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m\vec{a_{ZF}} = m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = m\omega^2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$\ddot{x}' = 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'$$
$$\ddot{y}' = -2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'$$

$$\Rightarrow \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = \omega^2 x'^2 + \omega^2 y'^2 + C$$

$\Rightarrow$ mit Anfangsbedingungen $x_0' = 0,\ y_0' = 0,\ \dot{x}_0' = 0\ \ \dot{y}_0' = v_0$

$C = -v_0^2$

und $r'^2 = x'^2 + y'^2$, $v'^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2$

$$\Rightarrow v' = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 r'^2}$$

Nabla Operator: Gradient, Divergenz, Rotation

16.10.24

Der Nabla Operator ist gegeben durch

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

, wobei $\frac{\partial}{\partial x}$ die partielle Ableitung bezüglich x ist.

- $\vec{\nabla} \cdot \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{Skalar}} = \underbrace{\text{grad } f(x,y,z)}_{\text{Vektor}}$: „Gradient"

Der Gradient ist ein Vektor, der anzeigt, in welche Richtung es am steilsten ist.

- $\vec{\nabla} \cdot \underbrace{\vec{v}(x,y,z)}_{\text{Vektor}} = \underbrace{\text{div } \vec{v}(x,y,z)}_{\text{Skalar}}$: „Divergenz"

(Die Divergenz ist eine Grösse dafür, wieviel Fluss aus einem Volumen kommt.)

- $\vec{\nabla} \times \underbrace{\vec{v}(x,y,z)}_{\text{Vektor}} = \underbrace{\text{rot } \vec{v}(x,y,z)}_{\text{Vektor}}$: „Rotation"

Arbeit und Leistung

18.10.24

- Die Arbeit, welche nötig ist um einen Körper entlang von r von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ zu bewegen, wobei die Kraft $\vec{F}$ benötigt wird ist gegeben als:

$$dW = \vec{F} d\vec{s} \iff W = \int_{\vec{r}_1(t)}^{\vec{r}_2(t)} \vec{F} d\vec{s}$$

- Die Leistung ist gegeben als die Arbeit pro Zeit

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$

Kinetische Energie 18.10.24

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\, d\vec{r} \quad \left(\text{mit } d\vec{r} = \vec{v}\, dt\right)$$

$$= m \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \vec{v}'\, d\vec{v}' = \frac{1}{2} m \left(\vec{v}_2^{\,2} - \vec{v}_1^{\,2}\right)$$

Dabei ist die kinetische Energie

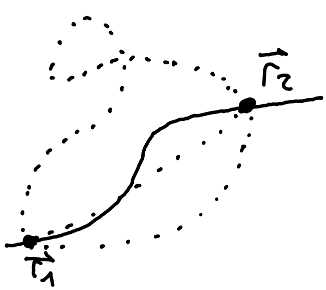
$$E_{kin} = T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{da } p = mv)$$

Konservative Kräfte, potentielle Energie (potential) 18.10.24

Gegeben sei ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

Gesucht sei ein Potential $U(\vec{r})$ mit $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$

Falls solch ein Potential existiert, nennen wir das Kraftfeld konservativ und das Wegintegral $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{s}$ ist unabhängig vom Weg von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$



Arbeit ist unabhängig vom Weg, einzig $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ sind wichtig.

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{\nabla} U) d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dU \quad \left(\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \right)$$

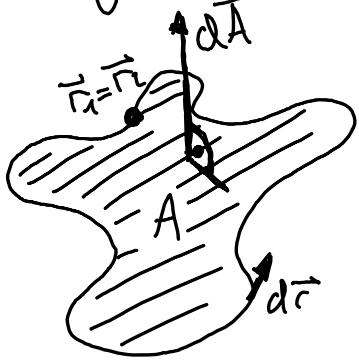
$$\Rightarrow W = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$

Positive Arbeit bedeutet also eine Verringerung der potentiellen Energie.

Satz von Stokes

18.10.24

Der Weg Γ sei geschlossen.
Es gilt also, dass $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$



$$\oint_\Gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A \text{rot}\, \vec{F}\, d\vec{A}$$

Wenn die Kraft konservativ ist gilt

$$\oint_\Gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \oint_\Gamma -\vec{\nabla} U\, d\vec{r} = \int_{A(\Gamma)} -\text{rot}\left(\vec{\nabla} U\right) d\vec{A} = \int_{A(\Gamma)} -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} U\right) d\vec{A} = 0$$

Da $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}$ gilt $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$.

Wir sehen also, dass wenn die Ortsänderung schlussendlich Null ist, auch keine Änderung der potentiellen Energie zu sehen ist bzw keine Arbeit geleistet wurde.

Spezifisches Potential 22.10.24

Wir werden oft Kräfte antreffen, die folgendermassen beschrieben werden können:

$$\vec{F}(\vec{r},t) = \gamma \vec{f}(\vec{r},t)$$

Dabei ist γ eine sogenannte Kopplungskonstante

z.B.

- γ: Masse $\quad \vec{f}(\vec{r},t) = -G_N \frac{m}{r^2}\hat{r}$
- γ: Ladung $\quad \vec{f}(\vec{r},t) = k_c \frac{q}{r^2}\hat{r}$

Dann wird das <u>spezifische Potential</u> entsprechend gebildet:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{\gamma} U(\vec{r})$$

wobei $U(\vec{r})$ das Potential / Energiepotential.

Drehimpuls & Drehmoment 25.10.24

Der Drehimpuls ist gegeben als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}_\perp = \vec{r} \times (\vec{p}_\parallel + \vec{p}_\perp) = \underbrace{\vec{r} \times \vec{p}_\parallel}_{=0} + \vec{r} \times \vec{p}_\perp = \underline{\vec{r} \times \vec{p}}$$

Dabei ist $\vec{p}$ der Impuls ($\vec{p} = m\vec{v}$) der Masse mit Abstand $\vec{r}$ zum Zentrum der Kreisbewegung.

Der Impuls in einem abgeschlossen System ist erhalten. Für den Drehimpuls betrachten wir analog dazu

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Da in einem jeden abgeschlossenen System $\dot{\vec{p}} = 0$ bzw $\vec{F} = 0$ muss auch $\dot{\vec{L}} = 0$ sein

d.h. der Drehimpuls $\vec{L} = \text{konst.}$

Ausserdem definieren wir das Drehmoment

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Impuls $\vec{p}$

Kraft $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Drehmoment $\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$

Schwerpunkt & Schwerpunktsatz 25.10.24

Der Schwerpunkt, Massenmittelpunkt oder auch gewichtetes Mittel der Ortsvektoren ist

$$\vec{r}_s := \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes lautet dann

$$m_{tot} \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} = \vec{F}_{ext}$$

Der Schwerpunktsatz besagt, dass sich der Schwerpunkt mit konstantem Impuls bewegt, wenn keine äussere Kräfte wirken.

$$\frac{d\vec{p}_s}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext,i}$$

Keplersche Gesetze

31.10.24

1.KG) Die Bahnen der Planeten sind Elipsen in deren einem Brennpunkt die Sonne ist.

2.KG) Der Fahrstrahl der Planeten überstreicht in gleicher Zeit gleiche Flächen.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_{tot}}{2m} = \text{konst.}$$

3.KG) Die Quadrate der Umlaufszeiten T verhalten sich wie die Kuben ihrer grossen Bahnhalbachsen a.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G_N M} = \text{konst.}$$

KG2) Fläche pro Zeit : $dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|dt = \left|\frac{\vec{L}}{2m}\right|dt$

$\Rightarrow$ da $\vec{L} = \text{konst}$ ist $\frac{dA}{dt} = \text{konst.}$

KG1) Energie : $E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) - G_N\frac{mM}{r}$

$a := -G_N\frac{mM}{2E}$ $\qquad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G_N^2M^2m^3}$

ε : Exzentrität $\qquad$ a: Halbachse (Gross)

$\Rightarrow$ Aufstellen & lösen einer DGL für r

$\Rightarrow r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $\rightsquigarrow$ Kegelschnitt $\rightsquigarrow$ Elipse mit Brennpunkt im Ursprung

KG3) $T = \frac{\text{Fläche der Elipse}}{\text{Flächengeschwindigkeit}} = \frac{\pi a \cdot b}{L/(2m)}$

$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G_N M}\cdot a^3 \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G_N M} = \text{konst.}$

Effektives Gravitationspotential

31.10.24

Die Energie eines Körpers in einem Gravitationsfeld ist gegeben als

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} - G_N \frac{mM}{r}$$

Die Kinetische Energie kann hier in einen Radial Teil und einen Winkelteil aufgespalten werden. Da $\frac{L^2}{2mr^2}$ nur von r abhängt und nicht von φ oder $\dot{r}$ trennt man ihn von der Kinetischen Energie und zählt ihn zum Potential

$$E_p^{eff} = -G_N \frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Wobei Dieser Term als <u>effektives Gravitationspotential</u> beschrieben wird.

Bei grossen Entfernungen überwiegt das Gravitationspotential. Die minimale effektive Gravitationspotential erhält man bei

$$\frac{dE_p^{eff}}{dt} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{G_N m^2 M}$$

Gravitationsfeld einer Kugel/Kugelschale 5.11.24

Man kann zeigen, dass das Gravitationsfeld <u>innerhalb</u> einer Kugelschale mit homogener Dichte verschwindet.

$$\vec{g}(r<R)=0$$

Ausserdem gilt, dass ausserhalb der Kugelschale das Gravitationspotential dem der gesamten Schalenmasse im Zentrum entspricht.

$$\underline{\vec{g}(r>R)=-G_N\frac{m}{r^2}\hat{r}}$$

Für eine Kugel lässt sich dieselbe Überlegung für mehrere Kugelschalen machen.

Innerhalb der Kugel:

$$\vec{g}(r\leq R)=-G_N\left(\frac{m}{R^3}r^3\right)\frac{1}{r^2}\hat{r}=\underline{-G_N\frac{m}{R^3}r\cdot\hat{r}}$$

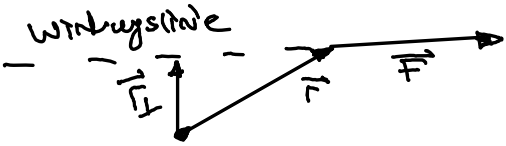
Ausserhalb der Kugel gilt dann

$$\vec{g}(r\geq R)=-G_N\frac{m}{r^2}\cdot\hat{r}$$

Wirkungslinie, Addition von Drehmomenten und Kräftepaare

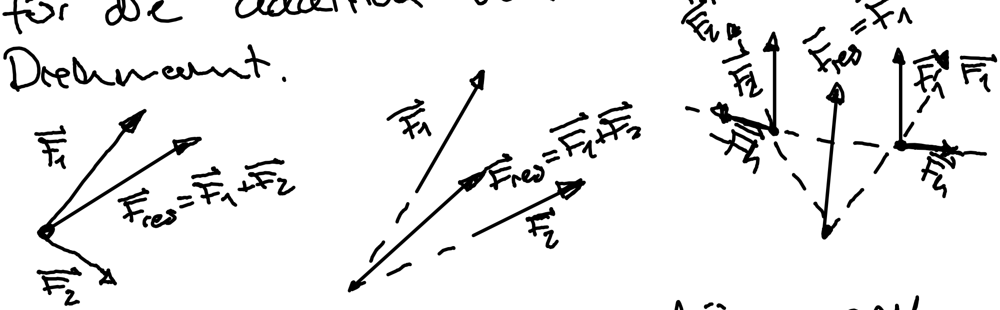
10.11.24

Das Drehmoment ist nur abhängig von $\vec{r}_\perp$. Die Verlängerung von $\vec{F}$ wird auch Wirkungslinie genannt und es ist egal (für das Drehmoment), wo auf dieser Wirkungslinie die Kraft angreift



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r}_\perp \times \vec{F}$$

Daraus resultieren verschiedene Regeln für die Addition von Kräften beim Drehmoment.



Mit paarweisem Vorgehen können auch mehrere Vektoren so zusammenaddiert werden und ein resultierende Kraft bzw Drehmoment bestimmt werden.

- Ein Kräftepaar ist $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, wenn

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$= \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}_{:= \vec{r}_{12}} \times \vec{F}_1$$

$$= \vec{r}_{12} \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{12\perp} \times \vec{F}_1$$

Ein Kräftepaar bewirkt also keine translative Beschleunigung, sondern nur eine Rotationsbeschleu

Trägheitsmoment – Trans-Rot

20.11.24

Bei der rotation um eine Raumfeste Achse macht die Einführung des Trägheitsmoment Sinn. Es ist das rotations-äquivalenz zur Masse bei translation.

$$I = \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{r}_{i\perp}^{\,2}) = \int_M \vec{r}_{i\perp}^{\,2}\, dm = \int_V \vec{r}_{i\perp}^{\,2} \rho\, dV$$

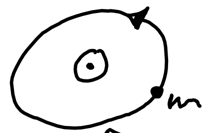
Dann lassen sich folgende Grössen praktisch und einfach Umschreiben

Translation	Rotation
Ort $\vec{r}$	Winkel φ
Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$	Winkelbeschleunigung $\alpha = \ddot{\varphi}$
Masse m	Trägheitsmoment $I = \int r_\perp^2\, dm$
Impuls $\vec{p} = \vec{v} m$	Drehimpuls $\vec{L} = \vec{\omega} I = \vec{r} \times \vec{p}$
Kraft $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\vec{a}$	Drehmoment $\vec{M} = \dot{\vec{L}} = I\vec{\alpha}$
Arbeit $W = \int \vec{F}\, d\vec{r}$	$W = \int M\, d\varphi$
kin. Energie $T = \frac{1}{2} m v^2$	Rot. Energie $T^* = \frac{1}{2} I \omega^2$
Leistung $P = \vec{F}\vec{v}$	Leistung $P = \vec{M}\vec{\omega}$

Wichtige Trägheitsmomente 20.11.24

Punktmasse im Abstand r zu Drehachse

$I = m r^2$



dünner Zylindermantel um Drehachse

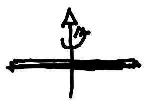
$I = m r^2$

Vollzylinder um Drehachse

$I = \frac{1}{2} m r^2$

Dünner Stab Länge l

$I = \frac{1}{12} m l^2$



Massive Kugel um Achse durch Zentrum

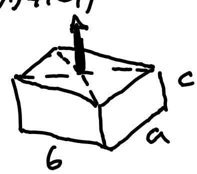
$I = \frac{2}{5} m r^2$

Dünne Kugelschale

$I = \frac{2}{3} m r^2$

Quader um Achse durch Mittelpunkt parallel zu c

$I = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$



Massiver Kegel um seine Achse

$I = \frac{3}{10} m r^2$

dünner Kegelmantel um seine Achse

↳ Vorstellung ⇒ zum Kreis plattdrücken

$I = \frac{1}{2} m r^2$

Satz von Steiner

27.11.24

bisher haben wir Trägheitsmomente berechnet für Drehachsen durch den Schwerpunkt.
Für Parallelen z' im Abstand $\vec{a}$ zu dieser Drehachse z gilt

$$\underline{I_{z'} = I_z + Ma^2}$$

Das folgt aus

$$I_{z'} = \int_M (a+r)^2 dm = a^2 \int_M dm + 2a \int_M r\,dm + \int_M r^2 dm$$

$$= a^2 M + I_z$$

Rollbedingungen und Rollreibung 27.11.24

- Ein runder Körper rollt, wenn gilt:

$$v_S = R\dot{\varphi} \quad \text{und} \quad a_S = R\ddot{\varphi}$$

Dabei beschreibt v_S die Geschwindigkeit des Schwerpunktes und a_S die Beschleunigung bezüglich des Schwerpunktes.

- Wir betrachten eine Kugel, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt. Es wirken folgende Kräfte

$$F - F_R = 0 \quad \text{mit } F_R \leq \mu_0 F_N$$

F ist dabei die Kraft, die die Kugel nach vorne schiebt.
Wichtig ist, dass die Normalkraft im Abstand μ_r zum Schwerpunkt angreift, da die Mantelfläche mit dem Boden grösser ist.
Daraus resultiert für das Drehmoment

$$M = F_N \mu_r - r F_r \quad \text{mit } M = 0$$

$$\Rightarrow F_R = \frac{F_N \mu_r}{r} = \mu_r F_N$$

Harmonische Schwingung Bewegungsgleichungen, Periode, Frequenz, Schwingungen von starren Körpern, Amplitude, Anfangsbedingungen Energie, Gleichverteilung 27.11.24

Es gilt Kraft $\propto$ Auslenkung $F(x) = -kx$

Allgemein gilt $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = 0$

wobei der Term mit a_1 eine Dämpfung ist, die wir momentan vernachlässigen $(a_1 = 0)$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Das ist eine DGL mit der Lösung

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$
$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A\cos(\omega t + \delta)$$
$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \delta)$$

- Dabei gilt natürlich $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und $f = T^{-1} = \frac{\omega}{2\pi}$
- Für starre Körper betrachtet man die Bewegung des Massepunktes
- Die Amplitude A ist die Maximale Entfernung
- Es gilt $v_0 = \omega A\cos(\delta)$ und $x_0 = A\sin(\delta)$

  $\Rightarrow \delta = \arctan\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right)$ und $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$
- Die Energie ist gegeben als

  $(\ddot{x} + \omega^2 x)m\dot{x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) = 0$

  bzw $E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$

  mit einsetzen der Gleichungen folgt

  $E_{tot} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$
- Es gilt der Gleichverteilungssatz

  $\langle E_{kin}\rangle_T = \langle E_{pot}\rangle_T = \frac{1}{2}E_{tot} = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2$

Gedämpfte Schwingungen 27.11.24

Es tritt zusätzlich eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft auf

$F_R = -\varkappa \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\varkappa}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Definiere $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ und $\rho = \frac{\varkappa}{2m}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ löse die DGL

$x(t) = Ae^{-\rho t} e^{\pm\sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}\, t}$

- Schwache Dämpfung $\rho \ll \omega_0$

$\boxed{x(t) = A \sin(\omega t + \delta) e^{-\rho t}}$ wobei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} \approx \omega_0$

- kritische Dämpfung $\rho = \omega_0$

$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\rho t}$ $\rightsquigarrow$ fällt direkt auf 0

Gedämpfte Schwingung Energiebilanz und Gütefaktor

2.12.24

Energiebilanz

Bei der gedämpften Schwingung verliert das System Energie. Dabei ist die Verlustleistung gegeben als

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2\right) = -2\rho m\dot{x}^2 = -2\rho E_{tot}(t) = P_R$$

Bzw die Energie im System als

$$E_{tot}(t) = E_{tot}(t=0)\, e^{-2\rho t} = E_0\, e^{-t/\tau}$$

Wobei $\tau = \frac{1}{2\rho}$ die Zerfallskonstante ist.

Gütefaktor Q

Der Gütefaktor gibt an wieviele Schwingungen zu sehen sind. ⇒ Mass für Dämpfung des Systems.

$$Q = 2\pi \frac{E_{tot}(t)}{E_{tot}(t) - E_{tot}(t+T)} = \frac{E_0 e^{-t/\tau}}{E_0 e^{-t/\tau}(1 - e^{-T/\tau})}$$

Wobei für $\tau \gg T$ gilt

$$Q = 2\pi \frac{\tau}{T} = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2\rho}$$

Erzwungene Schwingung und Resonanz 2.12.24

Externe Anregung $F_{ext}(t) = F_0 \cos \Omega t$

Wobei Ω die Anregungs-Kreisfrequenz ist.

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t$$

Diese DGL lässt sich für $t \to \infty$ lösen (also nach Einschwingungsvorgang)

$$\Rightarrow x(t\to\infty) = X_0 e^{i\Omega t}$$

Daraus folgt

$$x_0 = |X_0| e^{i\delta_0}, \quad a_0 = \frac{F_0}{m}$$

Wobei δ_0 die Phasendifferenz von Anregung und Schwingung ist und gilt

$$\delta_0 = \arctan\left(\frac{-2\rho\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{-2\xi\eta}{1-\eta^2}\right)$$

Wir definieren $\eta := \frac{\Omega}{\omega_0}$ und $\xi := \frac{\rho}{\omega_0}$ und

$$V(\eta,\xi) := \frac{|X_0|}{a_0} = \frac{1}{\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}}$$

Wir nennen $V(\eta,\xi)$ Vergrösserungsfunktion oder Resonanzkurve, wobei ihr Maximum bei

$\eta_{res} = \sqrt{1-2\xi^2}$ bzw $\Omega_{res} = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$ liegt.

i man sieht, dass falls $\Omega \to 0$ $\delta_0 \to 0$, $\Omega \to \infty$, $\delta_0 \to \pi$ und die Resonanzkatastrophe geschieht mit kleinem ρ und $\Omega \to \omega_0$.

Energiebilanz Erzwungene Schwingung 4.12.24

BWGL : $m\ddot{x} + 2m\rho\dot{x} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos\Omega t \quad | \cdot \dot{x}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2\right)}_{\text{Erhalten}} = -2m\rho\dot{x}^2 + F_0\cos(\Omega t)\dot{x}$$

$$\Rightarrow F_0 \cos(\Omega t)\dot{x} = 2m\rho\dot{x}^2$$

Gemittelte Leistung

$$\langle P \rangle_{T\Omega} = \frac{1}{T\Omega}\int_0^{T\Omega} F_0\cos(\Omega t)\dot{x}\,dt = -\frac{1}{2}F_0\Omega|x_0|\sin\delta_0$$

$$\langle P \rangle_{T\Omega} = \frac{m a_0^2}{4\rho}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\rho\Omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\langle P \rangle}{\partial\Omega} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \Omega^{\text{Leistung}}_{\text{Res}} = \omega_0$$

D.h. Die Erregerkreisfrequenz mit der grössten Leistung ist nicht ganz übereinstimmend mit der Erregerkreisfrequenz für die grösste Amplitude.

Überlagerung von Schwingungen

4.12.24

Gleiche Frequenzen, unterschiedliche Amplituden, Phase

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1)$$
$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta_2)$$

Dann gilt für $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega t + \delta)$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_1 - \delta_2)$$

$$\tan\delta = \frac{A_1\sin\delta_1 + A_2\sin\delta_2}{A_1\cos\delta_1 + A_2\cos\delta_2}$$

Unterschiedliche Frequenzen, gleiche Amplituden, keine Phase

$$x_1(t) = A\cos(\omega_1 t)$$
$$x_2(t) = A\cos(\omega_2 t)$$

Daraus folgt für $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$x(t) = 2A\underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)}_{\text{Schwebungsterm}}\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Dabei gilt für die Schwebungsfrequenz

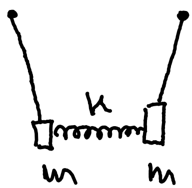
$$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right|$$

Halbe Schwebungsperiode (von Minimum zu Minimum)

$$\tau = \frac{T_s}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$$

Gekoppelte Schwingungen 5.12.24

BWGL zu Bsp



$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0$$

$\Rightarrow$ mit $z_1 = x_1 - x_2$ und $z_2 = x_1 + x_2$ lassen sich die DGL umschreiben und für ω_1 und ω_2 Lösungen gefunden werden.

$$x_1(t) = A\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$
$$x_2(t) = A\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \delta_0\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \delta_0\right)$$

i Die Oszilation können auch anders gekoppelt sein, dann können die Rechnungen jedoch schnell kompliziert und mühsam werden.

Amplituden Modulation AM

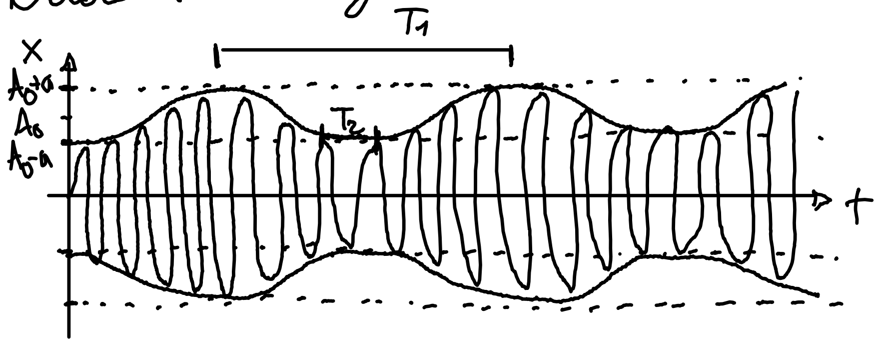
5.12.24

Niederfrequente Signale können häufig aus technischen Gründen nicht geteilt bzw aufgefasst werden. Man nutzt die AM um ein Signal mit Trägerfrequenz $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$.

Man verschickt anstelle davon, das Amplitudenmodulierte Signal der Form

$$x(t) = (A_0 + a\cos\omega_2 t)\cos(\omega_1 t)$$
$$= A_0\cos(\omega_1 t) + \frac{a}{2}\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) + \frac{a}{2}\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

Dabei muss gelten $a < A_0$



Ideale Gase

15.12.24

Ein ideales Gas ist eine Vereinfachung, wobei

- keine Kräfte zwischen Teilchen auftreten und Stösse elastisch
- kein Volumen einnehmen
- ideale Gasteilchen rotieren und vibrieren nicht.

Es gilt

$p = \text{konst}: \quad V \propto T$ Guy-Lussac

$V = \text{konst}: \quad p \propto T$ Amontons

$T = \text{konst}: \quad p \propto V^{-1}$ Boyle-Mariotte

Zusammengefasst gilt

$pV = nRT = Nk_BT$, wobei R die universelle Gaskonstante und $k_B = \frac{R}{N_A}$ die Stefan-Boltzmann Konstante ist.

Wärmeengie und Wärmekapazität 15.12.24

Wärmezufuhr führt (ohne Arbeit) zu einer erhöhung der Temperatur. Dabei gilt
$\Delta Q = C \Delta T$, wobei C die Wärmekapazität ist und von Temperatur und Stoffmenge und dem Stoff selbst abhängig ist.

Spezifische Wärmekapazität:

$$C_m = \frac{1}{n} \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$, wobei n die Stoffmenge in mol ist.

Es gilt $\bar{Q} = \int \delta \bar{Q} = \int_{T_A}^{T_E} C(T) dT$

Wir unterscheiden zwischen die spezifischen Wärmekapazität bei konstanten Druck C_p und bei konstaten Volumen C_v.

$$C_p = \frac{f(T)}{2} R + R \quad , \quad C_v = \frac{f(T)}{2} R$$

wobei $f(T)$ die Freiheitsgrade der kinetischen Energien sind und von der Temperatur abhängen. Es gilt dan

$$R = C_p - C_v$$

Die Latente wärme ist entscheidend bei Phasenübergängen. Dann ist die nötige energie gegeben als

$\Delta Q = L_m m$, wobei L_m für die Masse normalisiert ist.

0.HS und 1.HS der TD

15.12.24

Der 0.HS der TD besagt, dass wenn wir zwei System mit unterschiedlich Temperaturen T_A, T_B in thermischen Austausch bringen, das zusammengeführte System einen Gleichgewichtszustand erreichen wird und gilt

für $T_A \geq T_B$: $T_A \geq T_{A+B} \geq T_B$

für $T_A < T_B$: $T_A < T_{A+B} < T_B$

Der erste HS der TD besagt mehr oder weniger, dass die innere Energie eines Systems eine Zustandsgrösse ist die ohne externe Abgaben, Zunahme konstant bleibt. Und von mehrere Parametern abhängt. $U \overset{Gas}{=} (p, V, T \ldots)$

Es gilt zudem

$$\Delta U = U_E - U_A = \Delta Q + W$$

$$dU = \delta W^{\not} + \delta Q^{\not}$$

Äquipartitionsprinzip (TD) 15.12.24

Das Äquipartitionstheorem der TD besagt, dass die gesammte innere Energie eines Systems vom idealen Gas gleichmässig auf dessen Freiheitsgraden der kinetisch Energie aufgeteilt sind. Und gegeben als

$E = \frac{1}{2} k_B T$ bzw für f Freiheitsgrade $E = \frac{f}{2} k_B T$

Die Gesammte innere Energie ist dann gegeben als

$U = \frac{f}{2} nRT$ d.h. $U \propto T$

Isobar, Isotherm, Isochor und Adiabatisch
13.12.24

p = konst

$$W^{\alpha} = -p\int_{V_A}^{V_E} dV = p(V_A - V_E) = k_B N (T_A - T_E)$$

Isobare Expansion: Volumen und innere Energie steigen
→ um bestimmtes T zu erreichen brauchen wir ein grösseres ΔQ als beim Isochore Vorgang.

T = konst
$\Delta U = 0$, da $U \propto T$

$$Q^{\alpha} = -W^{\alpha} = nRT\int_{V_A}^{V_E} \frac{dV}{V} = nRT \ln\left|\frac{V_E}{V_A}\right|$$

Isotherme Expansion: Das Gas verrichtet Arbeit, d.h. um $\Delta U = 0$ zu halten muss Wärme hinzugefügt werden.

V = konst
$W = 0$

$$\Delta U = \Delta Q = n C_V \Delta T$$

Wärmezufuhr → T wird grösser → U wird grösser
→ Druck steigt

Adiabatisch
$\Delta Q = 0$

Der ~~Adiabatenexponent~~ ist gegeben als $\varkappa = \frac{C_P}{C_V} = \frac{f+2}{f}$

Expansion: V wird grösser U, T und p sinken.

Es gelten

$pV^{\varkappa} = \text{konst.}$

$TV^{\varkappa - 1} = \text{konst.}$

$T^{\varkappa} p^{1-\varkappa} = \text{konst}$

2. Hauptsatz der Thermodynamik 17.12.24

- Wärme fliesst nicht spontan vom kälteren zum wärmeren Reservoir.
- Wärme kann nicht zu 100% in Arbeit umgewandelt werden. Es gibt also immer Abwärme.
- Der maximale Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine ist gegeben als

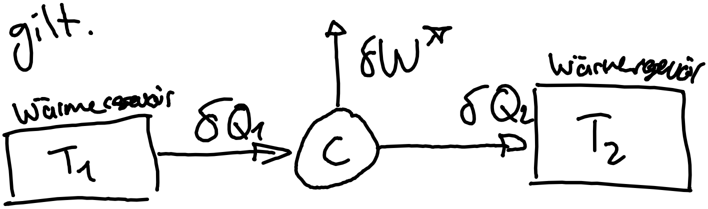
$$\eta_{real} < \eta_c = \frac{T_w - T_k}{T_w} < 1$$

- Bei einem Prozess, der von selbst abläuft nimmt die Entropie immer zu. ($\rightarrow$ Zeitrichtung)
- Es ist unmöglich in der Realität den absoluten Nullpunkt zu erreichen.

Carnot-Prozess

17.12.24

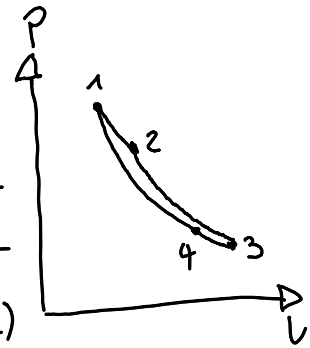
Der Carnot-Prozess ist zentral wichtig, da er als optimale Wärmekraftmaschine gilt.



mit $T_1 > T_2$

Der Carnot-Prozess läuft folgendermassen zyklisch

	A(1→2)	B(2→3)	C(3→4)	D(4→1)
Prozess	isotherm Expansion	adiabatisch Expansion	isotherm Kompression	adiabatisch Kompression
Temperatur	T_w	$T_w \to T_k$	T_k	$T_k \to T_w$
Arbeit	$\delta W_1^* = nRT_w \ln\frac{V_2}{V_1}$	$\delta W_2^* = nC_v(T_w - T_k)$	$\delta W_3^* = nRT_k \ln\frac{V_3}{V_4}$	δW_4^* $nC_v(T_w - T_k)$
Wärmezufuhr	$nRT_w \ln\frac{V_2}{V_1}$	0	$-nRT_k \ln\frac{V_3}{V_4}$	0



Dann ist der Wirkungsgrad gegeben als

$$\eta_C = \frac{\text{"Gewonnene Arbeit"}}{\text{"zugeführte Wärme"}} = \frac{\delta W_1^* + \delta W_2^* - \delta W_3^* - \delta W_4^*}{\delta Q_1^*} = \frac{T_1 - T_3}{T_1}$$

Und das ist immer kleiner als 1. Zudem gilt für alle reellen Maschinen $\eta_{Real} < \eta_C$

z.B. für sehr gute Dieselmotoren $\eta \approx 40\%$

Wärmepumpen und Kältemaschinen 17.12.24

Wärmepumpen und Kältemaschinen sind vom Prinzip her beides umgedrehte Carnot-Maschinen d.h. Man investiert Arbeit um Wärme von einem kälteren System in ein Wärmeres zu bringen. Dabei ist eine Kältemaschine eine Maschine, welche die Temperatur T_K verkleinern soll. Also ist die Nutzgrösse δQ_2 weshalb

$$\eta_{\text{Kältemaschine}} = \frac{\delta Q_2}{\delta W}$$ z.B. Kühlschrank.

Eine Wärmepumpe nicht sich als Ziel T_W zu erhöhen, wobei δQ_1 die Nutzgrösse ist und gilt

$$\eta_{\text{Wärmepumpe}} = \frac{\delta Q_1}{\delta W}$$ z.B. Klimaanlage

Entropie, 2. HS

21.12.24

Die Entropie als Mass der Unordnung oder Verwandelbarkeit ist gegeben als

$$S = k_B \ln W$$

, wobei k_B die Boltzmann konstante ist und W die Wahrscheinlichkeit, dass ein System im betrachteten Zustand auftritt. z.B. für ein Teilchen gilt $W = \frac{V_1}{V_0}$, wobei V_0 das Gesamtvolumen des Systems ist.

Für N Teilchen gilt dann $W = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^N = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{nN_A}$

Daraus folgt für ΔS beim Übergang von der Gleichverteilung zum Zustand, bei dem alle Teilchen in V_1 sind

$$\Delta S = k_B \ln W_2 - \cancelto{0}{k_B \ln W_1} = k_B N_A n \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = -R n \ln\left(\frac{V_0}{V_1}\right)$$

Aus Erfahrung wissen wir, dass ein System immer seinen wahrscheinlichsten Zustand anstrebt und gilt $\Delta S \geq 0$

Für einen beliebigen reversiblen Kreisprozess gilt

$$\Delta S = \oint dS = \oint \frac{\delta Q_{rev}}{T} = 0$$

Daraus folgt also eine Zeitrichtung, die mit der Entropie gekoppelt ist.

reversible und irreversible Prozesse

21.12.24

to-do

Reale Gase, kritischer Punkt, Latente Wärme

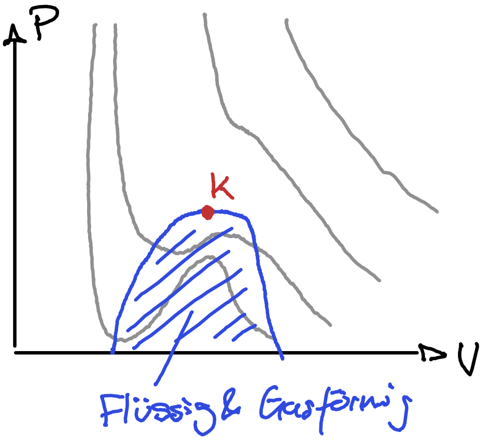
21.12.24

Bei der Van-der-Waals Gleichung werden zwischenmolekulare Kräfte und Volumen der Teilchen mit zusätzlichen Termen beachtet.

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

wobei a Kräfte zwischen Teilchen beachtet und b das Volumen eines Mol Teilchens ist.

Die Kurve für Isotherme reale Prozess



Für grosse T mehr oder weniger gleich wie ideale Gase. Für kleinere T sieht man Minima und Maxima.

In dieser (hier blauen) Glocke sind Gase und Flüssigkeiten koexistent. Es braucht also Energie um von Flüssig → Gas zu wechseln. Diese ~~Temperatur~~ Energie nennen wir Latente Wärme. $L(T)$

Für den kritischen Punkt gilt $L(T^k) = 0$

und $V_m^k = 3b$, $p^k = \frac{a}{27b^2}$, $T^k = \frac{1}{R}\,\frac{8a}{27b}$

und $\frac{p^k V_m^k}{RT^k} = \frac{3}{8}$, wobei V_m das Volumen pro Mol ist.