Fibonacci Folge (Rekursive Def + Eigenschaften) 18.9.24

Def: Eine Fibonacci Folge ist eine Folge $\mathcal{F}_{a,b} = (a_n)$, wobei $a_0 = a$ und $a_1 = b$ gilt.

$a_0 = a$

$a_1 = b$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (für alle $n \geq 2$)

Es gilt für alle $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in V$, wobei V die Menge aller Fibonacci Folge ist und $\mathcal{F} = (a_n)$ und $\mathcal{G} = (b_n)$ gilt, dass

(I) $\mathcal{F} + \mathcal{G} = (a_n + b_n)$

(II) $\alpha \mathcal{F} = (\alpha a_n)$

Ausserdem gilt

(I) $\mathcal{F}_{a,b} + \mathcal{F}_{c,d} = \mathcal{F}_{a+c,b+d}$

(II) $\alpha \mathcal{F}_{a,b} = \mathcal{F}_{\alpha a, \alpha b}$

Ausserdem gibt es für alle $\mathcal{F} \in V$ $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$\mathcal{F} = a \cdot \mathcal{F}_{0,1} + b \cdot \mathcal{F}_{1,0}$

Symmetrische Abbildung 18.9.24

Eine Abbildung $T: V \to V$ ist eine <u>Symetrie</u>, wenn

$$(\mathrm{I})\quad T(\mathcal{F} + G) = T(\mathcal{F}) + T(G)$$

$$(\mathrm{II})\quad T(\alpha \mathcal{F}) = \alpha T(\mathcal{F})$$

Eigefolge und Eigenwart 18.9.24

Es sei $T: V \to V$ eine Symmetrie.

Eine Folge $\mathcal{F} \in V$ mit $\mathcal{F} \neq F_{0,0}$ ist eine Eigefolge von T, wenn $T(\mathcal{F}) = \alpha \mathcal{F}$ ist, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ist und Eigenwert von T gennant wird.

V ist hier die Menge aller Fib-Folgen

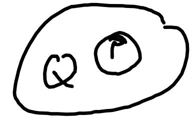
Ablauf zur expliziten Fib.-Folge 18.9.24

1. Finde zwei Fibonacci-Folgen, welche durch Geometrische Folgen einfach explizit formuliert werden können.
   ↳ $F_{1,\varphi}$ und $F_{1,\psi}$, wobei $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ die Goldenen Schnitte sind.
2. Zeige $F_{0,1}$ und $F_{1,0}$ durch $F_{1,\varphi}$ und $F_{1,\psi}$ ausgedrückt werden können.
3. Setze für die Ausdrücke in $F_{1,\varphi}$ und $F_{1,\psi}$ deren explizite Form ein.

Definition Teilmenge, strikte Teilmenge, Anzahl Teilmengen 21.9.24

P, Q seien Mengen.

(I) P ist eine <u>Teilmenge</u> von Q, wenn $\forall p \in P : p \in Q$. Also wenn alle Elemente aus P auch in Q zu finden sind.



Man schreibt $P \subseteq Q$.

(II) P ist eine strikte Teilmenge von Q, wenn $\forall p \in P : p \in Q$ und $P \neq Q$. Also wenn alle Elemente in P auch in Q sind, aber in Q noch zusätzlich andere Elemente sind. $\exists q \in Q : q \notin P$. Man schreibt $P \subsetneq Q$.

(III) Schreibe $P \not\subseteq Q$ wenn P keine Teilmenge von Q ist. $\exists p \in P : p \notin Q$.

Beachte: Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen. Für jedes Element gibt es die Option in der Teilmenge zu sein oder nicht. Dabei ist die leere Menge $\emptyset$ immer eine Teilmenge.

Def: Schnittmenge, Vereinigungsmenge und Kompliment 21.09.24

P, Q seien Mengen.

(I) Die Schnittmenge $P \cap Q = \{x \mid x \in P \text{ und } x \in Q\}$

(II) Die Vereinigungsmenge $P \cup Q = \{x \mid x \in P \text{ oder } x \in Q\}$

(III) P ohne Q: $P \setminus Q = \{x \mid x \in P \text{ und } x \notin Q\}$

(IV) Wenn $Q \subseteq P$ sagt man zu $P \setminus Q$
Das Kompliment von Q in P.
Man schreibt Q^c

Sei $\mathcal{A}$ eine Familie (Menge) von Mengen mit $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Die Vereinigungsmenge: $\bigcup_{M \in \mathcal{A}} M = \{x \mid \exists M \in \mathcal{A} : x \in M\}$

Die Schnittmenge: $\bigcap_{M \in \mathcal{A}} M = \{x \mid \forall M \in \mathcal{A} : x \in M\}$

Def: Cartesisches Produkt 21.9.24

X, Y seien Mengen. Das Cartesische Produkt

$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$

Sei die Menge aller geordneten Paare (x,y) mit $x \in X$ $y \in Y$.

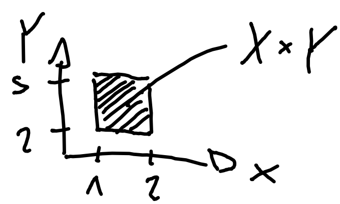
Bsp: $X = \{1,2\}$

$Y = \{1,2,3\}$

$X \times Y = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$

Oder $X = [1,2]$

$Y = [2,5]$



Weiter ist $X^n = \underbrace{X \times X \times \ldots X}_{n \text{ mal}}$

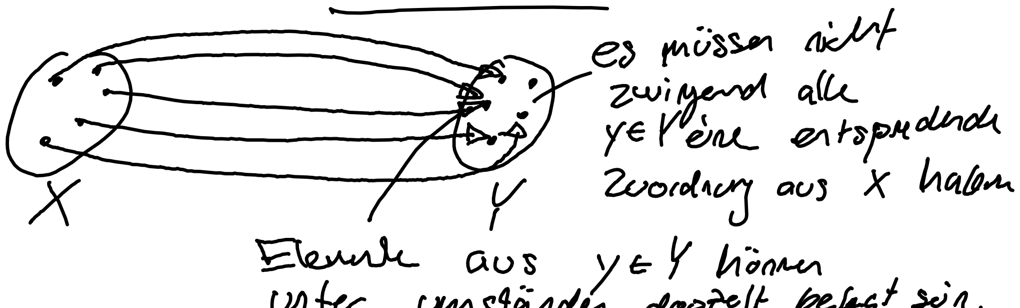
Def: Funktion 21.9.24

X, Y seien Mengen

Eine Funktion $f: X \to Y$ ist eine Relation die jedem Element aus X <u>genau ein</u> Element aus Y zuordnet.

$f(x) \in Y$ man schreibt $x \mapsto f(x)$

Dabei wird X '<u>Definitionsmenge</u>' genannt und Y die '<u>Zielmenge</u>'



Zwei Funktionen: $f: X \to Y$ und $g: X' \to Y'$ sind gleich $(f = g)$, wenn gilt:

(I) $f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$

(II) $X = X'$

(III) $Y = Y'$

Falls ein der Bedingungen nicht erfüllt ist, gilt

$f \neq g$

Def: Beschränkung einer Funktion 21.9.24

Es sei $f: X \to Y$ eine Funktion.
$A \subseteq X$
Die Beschränkung von f auf A ist
die Funktion

$$f|_A : A \to Y$$
$$x \mapsto f(x)$$

gleiche Abbildung mit
andere Definitionsmengen
↳ andere Funktion

Def: injektiv, surjektiv, bijektiv 21.9.24

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion

(I) f ist <u>injektiv</u>, wenn $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ gilt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$. Also wenn kein Output durch zwei veschieden Inputs belegt ist.

(II) f ist <u>surjektiv</u>, wenn $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ also gibt es für jeden Output mindestens einen Input

(III) f ist <u>bijektiv</u>, wenn f injektiv <u>und</u> surjektiv ist

$\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$

Es gibt also für jeden Output <u>genau</u> einen Input.

Def: Inverse und Komposition

(I) Sei $f: X \to Y$ bijektiv.
Die <u>inverse Funktion</u> von f, $f^{-1}: Y \to X$ ist die Funktion die $y \in Y$ auf das $x \in X$ abbildet, für das gilt $f(x) = y$

(II) $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ sind Funktionen.
Die <u>Komposition</u> $g \circ f$ ist die Funktion

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\longrightarrow Z \\ \rotatebox{90}{$\in$}\ & \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Bsp: Sei $f: X \to Y$ bijektiv.
Dann gilt
(I) $f^{-1} \circ f = id_X$
(II) $f \circ f^{-1} = id_Y$

$\Longrightarrow$ $g \circ f$ ist nicht zwingend $f \circ g$.

Def: Körper + Körper-axiome 25.9.24

Ein Körper (eng: field) ist eine Menge $K \neq \emptyset$ mit zwei Abbildungen

$$+: K \times K \to K$$
$$\cdot: K \times K \to K$$

mit zwei Elementen, die wir $0 \in K$ und $1 \in K$ nennen und $\underline{1 \neq 0}$ gilt, gelten die folgenden 9 Eigenschaften oder Körperaxiome genannt

I) Assoziativität von $+$:
$x+(y+z)=(x+y)+z$
$\forall x,y,z \in K$

II) Kommutativität von $+$:
$x+y=y+x \quad \forall x,y \in K$

III) neutrales Element von $+$:
$x+0=0+x=x \quad \forall x \in K$

IV) Additatives Inverses:
$\forall x \in K \; \exists x' \in K: x+x'=0$
↳ schreiben $x'=-x$

V) Assoziativität von $\cdot$:
$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
$\forall x,y,z \in K$

VI) Kommutativität von $\cdot$:
$x\cdot y = y\cdot x \quad \forall x,y \in K$

VII) neutrales Element von $\cdot$:
$x\cdot 1 = 1\cdot x = x \quad \forall x \in K$

IIX) Multiplikatives Inverses:
$\forall x \in K, x \neq 0 \; \exists \tilde{x} \in K: x\cdot\tilde{x}=1$
↳ schreiben $\tilde{x}=x^{-1}$

IX) Distributivität
$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$
$\forall x,y,z \in K$

Restklassenkörper modulo einer Primzahl 25.9.24
Beweis: ist Körper

Sei p eine Primzahl der Körper $\mathbb{F}_p$ ist folgendermassen definiert:

$$\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots p-1\}$$

Für $x, y \in \mathbb{F}_p$ definieren wir $x+y \in \mathbb{F}_p$ als den Rest der Division $\frac{x+y}{p}$.

Ebenso ist $x \cdot y \in \mathbb{F}_p$ definiert als den Rest von $\frac{x \cdot y}{p}$.

Beweis: das IX-te Körperaxiom ist das einzig nicht triviale. $\rightarrow$ multiplikative Inverse

Idee

$$M = \{1 \cdot x, 2 \cdot x \dots (p-1)x\} \quad x \in \mathbb{F}_p, x \neq 0$$

1) kein Element von M ist durch p teilbar.
   $\hookrightarrow p \mid x \cdot i \Rightarrow p \mid x \vee p \mid i$ da $1 \leq x, i < p$ ↯ $\rightarrow$ ✓

2) keine zwei Elemente von M haben den gleichen Rest bei Division durch p.
   $\hookrightarrow ix$ und jx haben gleichen Rest $\Leftrightarrow p \mid (i-j)x \Rightarrow p \mid x \vee p \mid i-j$
   mit $1 \leq x, i, j < p \Rightarrow p \nmid x$
   $\Rightarrow i-j = 0 \Leftrightarrow i = j$ ↯ $\rightarrow$ ✓

3) Wir haben $p-1$ Elemente, welche auf $p-1$ 'Boxen' aufgeteilt werden. Wir haben gezeigt, dass jede Box maximal einmal belegt ist
   $\hookrightarrow$ Pigeonhole-Principle $\Rightarrow$ Es gibt für jedes $x \in K$ ein Inverses $x^{-1} \in K$. $\square$

! wenn $\mathbb{F}_n$ und n keine Primzahl ist, ist $\mathbb{F}_n$ kein Körper. Das lässt sich einfach dadurch zeigen, dass die Primfaktoren von n in $\mathbb{F}_n$ sind. $\rightarrow$ Das multiplikative Inverse für alle Zahlen mit gemeinsamen Primfaktoren wie n gibt es nicht.

Def: kommutativer Ring

25.9.24

Eine Menge R ist ein kommutativer Ring, wenn für ihn alle Körperaxiome ausser IX (multiplikatives Inverses) gelten.

z.B. • $\mathbb{Z}$

• Restklassen bei Division durch $n \in \mathbb{N}_{>1}$

Matrix, Zeilenvektor, Spaltenvektor, Null-Matrix, 25.9.24
Identitätsmatrix, Addition, Skalarmultiplikation, quadratisch

---

$m, n \geq 1$. K sei ein Körper. Eine $(m \times n)$-Matrix A mit Werten in K ist eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten.
Schreibe

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \qquad M_{m\times n}(K) = \{(m\times n)\text{-Matrizen mit Wert in } K\}$$

I) A ist quadratisch wenn $m = n$

II) eine $(1\times n)$-Matrix ist ein Zeilenvektor $(x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n)$

III) eine $(n\times 1)$-Matrix ist ein Spaltenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

IV) $O_{m\times n}$ ist eine $(m\times n)$-Matrix voller Nullen

V) $\mathbb{1}_n$ ist eine quadratische $(n\times n)$-Matrix mit einsen auf der Diagonale, ansonsten nur Nullen $\Rightarrow$ Identitätsmatrix

VI) $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ $\quad A + B \in M_{m\times n}(K)$

$$(A+B)_{i,j} = a_{ij} + b_{i,j}$$

VII) $A = (a_{i,j}) \in M_{m\times n}(K)$ $\quad \alpha \in K$

$$\alpha A \in M_{m\times n}(K)$$

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{i,j}$$

Produkt zweier Matrizen

28.9.24

Das Produkt zweier Matrizen $A \in M_{m\times n}(K)$ und $B \in M_{n\times p}(K)$ ist definiert, wenn die Anzahl Spalten der ersten Matrix der Anzahl Zeilen der zweiten Matrix entspricht.

Die Resultierende Matrix C ist in $M_{m\times p}(K)$ hat also gleiche Zeilenzahl wie A und gleiche Spaltenzahl wie B.

$$C = (c_{i,j})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le p}} \rightsquigarrow c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{jk}$$

Es gilt:

(1) Assoziativität: Die Klammersetzung ist egal

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad \forall A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times p}(K), C \in M_{p\times q}(K)$

(2) Distributivität: Ausmultiplizieren der Klammerterme

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \forall A \in M_{m\times n}(K), B, C \in M_{n\times p}(K)$

(3) Skalare können frei bewegt werden (schweben)

$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \quad \forall A \in M_{m\times n}(K), B_{n\times p}(K), \alpha \in K$

(4) Wenn $A \in M_{m\times n}(K)$ und $B \in M_{n\times p}(K)$ sind, ist BA nur definiert, wenn $p = m$ ist.

$\Rightarrow AB \in M_{m\times m}(K)$, $BA \in M_{n\times n}(K)$

Wenn $m = n = p$ gilt

$AB, BA \in M_{n\times n}(K)$ aber mit $n \neq 1$ nicht immer $AB = BA$

Inverse einer Matrix 28.9.24

Eine Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ ist invertierbar, wenn

$\exists B \in M_{n\times n}(K): AB = BA = \mathbb{1}_n$.

Wenn A invertierbar ist gibt es <u>genau eine</u> Matrix B welche wir inverse von A nennen und $B = A^{-1}$ schreiben.

- $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}_n$
- Wenn $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Diagonalmatrix, obere/untere Dreiecksmatrix 28.9.24

Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$

- A ist <u>diagonal</u>, wenn $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$
  $\mapsto$ also wenn nur auf der Diagonale Einträge sind, ansonsten nur Nullen.
- A ist eine obere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$ $\Rightarrow$ alle Non-Zero Beiträge sind oben rechts.
- A ist eine untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0 \ \forall j > i$ $\Rightarrow$ alle Non-Zero Beiträge sind unten links.

Bei der Multiplikation zweier gleichförmigen Matrizen, wird diese Form (diagonal/obere/untere) bewahrt.

Elementare Zeilenoperationen EZU 28.9.24

Sei $A \in M_{m\times n}(K)$. Die EZUs auf A sind:

- $P(r,s)$ für $1 \leq r,s \leq m$: Vertauschen der Zeilen r und s.
- $M(r,\lambda)$ für $1 \leq r \leq m$, $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$: Multiplikation der Zeile r mit λ
- $S(r,s,\lambda)$ für $1 \leq r,s \leq m$, $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$: Multiplikation der Zeile r mit λ und anschliessende Addition in Zeile s.

A und A' sind Zeilenäquivalent, wenn man A' aus A und endlich vielen Anwendungen der EZUs erhält bzw. erhalten kann.

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{P(2,3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{M(1,-1)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{S(2,1,2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

A und A' sind Zeilenäquivalent.

Beweis: Jede Matrix ist Zeilenäquivalent zu einer Matrix in RZF + RZSF 2.10.24

Finde A' von $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, $A \in M_{m \times n}(K)$, so dass A' in RZF ist und A' durch endlich viele EZUs von A konstruiert werden kann.

(1) Wenn in einer Zeile nur Nullen sind sind wir fertig mit dieser Zeile

(2) Das erste Element welches nicht Null ist sei a_{IJ}.

(3) Wende $M(I, a_{IJ}^{-1})$ an um es zu einer Eins zu machen. Weiter werden $S(I, i, -a_{iJ})$ in allen Zeilen $i \neq I$ angewendet.

So haben wir aus A und endlich vielen EZUs ein A' in RZF o.B.d.A. gebaut. $\square$

Um A' in RZF als A'' in RZSF zu schreiben können wir $P(r,s)$ endlich oft anwenden.

$\square$

Def: Reduzierte Zeilenstufenform RZSF 2.10.24

Eine $(m \times n)$-Matrix ist in RZSF, wenn

(1) Die Matrix in RZF ist. (RZSF ist also eine ergänzende Anforderung zu RZF)

RZSF $\Rightarrow$ RZF RZF $\not\Rightarrow$ RZSF

(2) Alle Zeilen voller Nullen sind unten.

(3) Die führende Eins einer Zeile liegt rechts von der führenden Eins aus der Zeile darüber.

$$\underset{\text{RZF}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}} \xleftrightarrow[\text{von } P(s,r)]{\text{endlich Anwendungen}} \underset{\text{RZSF}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}}$$

(homogene) lineare Gleichungssysteme - LGS & erweiterte Matrizen

2.10.24

$m, n \in \mathbb{N}$, a_{ij} und b_j seien bekannt, x_j sind Unbekannte. Wir haben m Gleichungen der folgenden Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j \qquad a_{ij} \in K$$

Wir können das Gleichungssystem schreiben als

$$(S): Ax = b \quad \text{, wobei} \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(K)$$

$$b = (b_j)_{1 \leq j \leq n} \in M_{n \times 1}(K)$$

$$x = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in M_{n \times 1}(K)$$

- Falls $b = 0$, wird das LGS <u>homogen</u> genannt.

Wir schreiben die Lösungsmenge des LGS als

$$L(S) = \{(x_j) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x \in K : Ax = b\}$$

- Die erweiterte Matrix $A|b$ ist die $(m \times (n+1))$-Matrix, welche als $(n+1)$-te Spalte den b-Vektor hat.
- Das LGS $Ax = b$ wird bestimmt durch $A|b$. Wenn $b = 0$ ist $A|b = A|0 = A \rightsquigarrow$ <u>homogen</u>

2.10.24

Beweis: $L(S') = L(S)$ wenn (S) und (S') zeilenäquivalent sind

---

- Es reicht den Satz zu zeigen, wenn (S') durch (S) und EZUs konstruiert wurde.
- Da wir keine Bedingungen für (S') bzw. (S) haben reicht es, wenn wir $L(S') \subseteq L(S)$ zeigen, denn daraus können wir $L(S') \supseteq L(S)$ auch zeigen bzw $L(S') = L(S)$ folgen.

Z.Z: Egal welche EZU angewendet wird, $L(S)$ bzw $L(S')$ bleibt gleich.

- $P(r,s)$, $M(r,\lambda)$ sind trivial. $\Rightarrow$ normale Gleichungen
- $S(r,s,\lambda)$ einziger unterschied ist in Zeile s:

$$A|B \Rightarrow S(r,s,\lambda) \Rightarrow A'|B'$$

$$a'_{sj} = a_{sj} + \lambda a_{rj} \qquad b'_j = b_j + \lambda b_r$$

Es sei $x \in L(S)$, so dass gilt

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots a_{in} x_n = b_i$$

Dann gilt

$$a_{s1} x_1 + \dots + a_{sn} x_n + \lambda(a_{r1} x_1 + \dots a_{rn} x_n) = b_s + \lambda b_r$$

Das bedeuted, $L(S') = L(S)$ und zwei zeilenäquivalente LGS haben die selbe Lösungsmenge. $\square$

$\hookrightarrow$ Tendentiell sind LGS in RZSF am einfachs zu lösen.

2.10.24

RZF

Eine Matrix ist in reduzierter Zeilenform, wenn sie

(1) Als erster Wert in einer Zeile, die von Null verschieden ist eine Eins hat (führende Eins)

(2) Wenn er in der Spalte, welche zur führende Eins (aus (1)) gehört ansonsten nur Nullen hat.

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Def Vektorräume

6.10.24

Sei K ein Körper. Ein Vektorraum über K ist eine Menge V mit zwei Operationen/Abbildungen:

$$+ : V \times V \to V \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2 \quad \text{"Vektoraddition"}$$

$$\cdot : K \times V \to V \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \quad \text{"Skalarmultiplikation"}$$

Folgende Vektorraum-Axiome sind erfüllt.

Vektoraddition

(VR1) $\forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

(VR2) $\forall v_1, v_2, v_3 \in V : v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$

(VR3) $\exists 0_V \in V : v + 0_V = 0_V + v = v \quad , \forall v \in V$

(VR4) $\forall v \in V \, \exists! \, w \in V : v + w = 0_V \quad$ "$w = -v$"

Skalarmultiplikation

(VR5) $\forall v_1, v_2 \in V \; \forall \lambda \in K : \lambda (v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

(VR6) $\forall v \in V . \forall \lambda, \mu \in K : (\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$

(VR7) $\forall v \in V \; \forall \lambda, \mu \in K : (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda (\mu \cdot v)$

(VR8) $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$

Im Vergleich zum Körper fällt auf, dass die folgenden Axiome nicht erfüllt sein müssen:

(1) Multiplikatives Inverses existiert.

(2) $\cdot : V \times V \to V$ ist nicht definiert.

Beweis: Es gibt nur (einen Nullvektor / additives Inverses) in einem Vektorraum 6.10.24

(1) Nimm an es gibt 0_V und $0_V'$, die beide (VR3: existenz des Nullvektors) erfüllen. Dann gilt, dass

$$0_V \underset{\text{weil } 0_V' \text{ (VR3) erfüllt.}}{=} 0_V + 0_V' \underset{\text{weil } 0_V \text{ (VR3) erfüllt.}}{=} 0_V'$$

$\square$

(2) Nimm an es gibt w und w' die (VR4: existenz des additiven Inverses) erfüllen. Dann gilt

$$v + w + w' = (\overbrace{v + w}^{0_V}) + w' = w'$$
$$= (\overbrace{v + w'}^{0_V}) + w = w$$

$\Rightarrow w' = w$ $\square$

Def: Unterräume 6.10.24

Sei K-VR und $U \subseteq V$ ist ein Unterraum von V, wenn

(VR0) $U \neq \emptyset$

(VR1) $\forall u,v \in U$ gilt $u+v \in U$

(VR2) $\forall u \in U, \lambda \in K$ gilt $\lambda u \in U$

Das Gesetz (VR1) besagt, dass U bezüglich der Vektoraddition abgeschlossen ist und (VR2) besagt, dass U bezüglich der Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

↳ Schreibe $U \leq V$ (Kleiner-Gleich)

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn gilt

(1) $0_V \in U$

(2) $\forall u,v \in V, \lambda \in K$ gilt $u + \lambda v \in U$

Der Beweis zu (1) folgt aus $U \neq \emptyset$ und $\lambda u \in U$ mit $\lambda = 0$ und $0 \cdot v = 0_V$.

Der Beweis zu (2) folgt aus $\lambda v \in U$ und $v+v \in U$.

Linearkombinationen, lineare Hülle, linear abhängig/unabhängig 9.10.24

- V sei ein K-VR und $v_1, \dots v_n \in V$.
  ein Element von V, von der Form
  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_n v_n$, $\alpha_i \in K$ ist eine Linearkombination von $v_1, v_2 \dots v_n$.
- Die lineare Hülle von $S \subseteq V$ sei definiert als
  $$\langle S \rangle = \{ v \in V \mid \exists n \geq 1, v_1, \dots v_n \in S, \lambda_1, \dots \lambda_n \in K, \text{ so dass } v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots \lambda_n v_n \}$$
  ↳ Menge aller möglichen Linearkombinationen.
  ACHTUNG: S kann unendlich viele Elemente enthalten, aber es sind nur endliche Summen erlaubt.
- V sei ein K-VR und $v_1, \dots v_n \in V$.
  Dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, wenn gilt
  $$0_V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_n v_n \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n$$
  Falls es neben $\alpha_i = 0$ noch andere Lösungen gibt, sind $v_1, v_2 \dots v_n$ linear abhängig.

Endlich dimensionaler VR, erzeugendes System 9.10.24

Anzahl Dimensionen eines VR

- V ist endlich-dimensional, wenn es endlich viele Vektoren $v_1, v_2, \dots v_n$ gibt, so dass jeder $v \in V$ als linearkombination von $v_1, v_2 \dots v_n$ geschrieben werden kann.

  Man schreibt dann $V = \langle v_1, v_2 \dots v_n \rangle$
- Die Vektoren $v_1, v_2 \dots v_n$ werden dann erzeugendes System von V genannt.
- Die Dimension eines Vektorraumes ist gegeben als die kleinst mögliche Zahl der Vektoren im erzeugenden System, so dass $V = \langle v_1, v_2 \dots v_n \rangle$ ist. V ist dann ein n-dimensionaler VR.

  ↳ sobald aber $v_1, v_2 \dots v_{n'}$ nicht mehr linear unabhängig sind, entspricht n' nicht der Anzahl Dimensionen.

Austauschlemma / Austauschsatz 13.10.24

- Das Austauschlemma besagt, dass wenn V endl. dim VR ist mit $v_1, \dots v_n$ als Basis, so ist $v_1, \dots v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots v_n$ auch eine Basis von V, wenn $w = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_j v_j + \dots \alpha_n v_n$ mit $\alpha_j \neq 0$.
- Der Austauschsatz besagt, dass mit gleichen V und $v_1, \dots v_n$ und $w_1 \dots w_k$ in V, wobei $w_1, \dots w_k$ lin unab. sind, $k \leq n$ und $(n-k)$ Basisvektoren (aus $v_1 \dots v_n$) zusammen mit $w_1, \dots w_k$ eine Basis von V sind.

Dimension eines Vektorraums

17.10.24

Sei V endlich dimensional.
Die Dimension von V ist die
Anzahl Elemente in seiner Basis.

Wenn V nicht endlich dimensional ist,
ist er unendlichdimensional und
wir schreiben

$$\underbrace{\dim_K V}_{\text{"V über K"}} = \infty$$

V sei ein $VR/_K$ mit $\dim_K V = n < \infty$.
Folgende Aussagen sind äquivalent

(I) $v_1 \dots v_n$ sind Basis
(II) $v_1 \dots v_n$ sind linear unabhängig
(III) $v_1 \dots v_n$ sind erzeugendes System
$\Rightarrow \langle v_1 \dots v_n \rangle = V$

Proof Unterräume von endl. dim VR sind endl. dim 17.10.24

V endl. dim VR/K, $U \subseteq V$.

Dann ist U endl. dim und es gilt

$\dim_K U \leq \dim_K V$

mit Gleichheit nur wenn $U = V$

Proof: Sei $\dim_K V = n$

- Wenn $U = \{0_V\}$ ist $\dim_K U = 0 \leq n$
- Wenn $U \neq \{0_V\}$ gibt es ein $u_1 \in U : u_1 \neq 0_V$

$\Rightarrow$ Falls $\langle u_1 \rangle = U$ ist $\dim_K U = 1$

$\Rightarrow$ andernfalls: $\exists\, u_2 \in U \setminus \langle u_1 \rangle$

Da u_1 und u_2 linear unabhängig sind, lässt sich dieser Prozess maximal n-mal wiederholen. $\leadsto$ Es resultiert ein $U = \langle u_1 \dots u_k \rangle$, wobei $k \leq n$.

und $\dim_K U = k \leq n = \dim_K V$

$\Rightarrow \dim_K U \leq \dim_K V$ $\square$

$\dim_K(U+W)$, V endl. dim VR/K $U, W \leq V$ 17.10.24

V sei ein endl. dim VR/K. U und W sind UR von V. Dann gilt

$$\dim_K(U+W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim(U \cap W)$$

$U = \langle u_1 \dots u_e \rangle$ $W = \langle w_1 \dots w_m \rangle$

Falls $w_i \in U$ ⇝ doppelt gezählt

Alle w_i die doppelt gezählt wurden sind $\langle w_1 \dots w_r \rangle = U \cap W$

↪ Da sie nur doppelt gezählt werden, wenn sie in der linearen Hülle von W sind und in der von U.

V endl. dim VR/$\mathbb{R}$ $\quad U, W, X \subseteq V \quad \dim(U+W+X)$? 19.10.24

Es gibt eine Formel für
$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$
Mit dem Ansatz $U' = U + W$
kann man parallel dazu $\dim(U'+X) = \dim(U+W+X)$
bestimmen. Dabei erhält man u.a. einen Term
$\dim((U+W)\cap X)$. Da dieser jedoch allgemein
nicht mit $\dim((U\cap X)+(W\cap X))$ gleichzusetzen
ist gilt <u>nicht</u>
$$\dim(U+W+X) = \dim(U) + \dim(W) + \dim(X) - \dim(U\cap W) - \dim(W \cap X) - \dim(U \cap X) + \dim(U \cap W \cap X)$$

Es gibt <u>keine</u> Formel für die Dimension
Dreier Unterräume.

z.B. $V = \mathbb{R}^2 \quad U = \langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle, W = \langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rangle, X = \langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rangle$

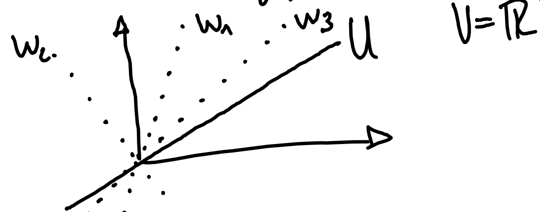
$\rightsquigarrow$ Formel ergibt $\dim(U+W+X) = 3$
wobei $\dim(U+W+X)$ offensichtlich 2 ist
$2 \neq 3$ ↯

19.10.24

Def.: Komplement eines UR
Proof das immer ein Kompliment existiert

- Sei V K-VR, $U \subseteq V$ ein Unterraum $W \subseteq V$ ist ein Kompliment von U, wenn gilt
  (1.) $V = W + U$
  (2.) $U \cap W = \{0_V\}$

Achtung: Es ist nicht wahr, dass das Komplement von U gegeben ist durch $V - U$.



Satz: Für jeden Unterraum gibt es mindestens ein Komplement.

Beweis: Sei $u_1 \ldots u_k$ Basis von U.
Wir erweitern zu einer Basis von V mit $v_1 \ldots v_{n-k}$. Dann ist
$V = \langle u_1 \ldots u_k, v_1 \ldots v_{1-k} \rangle$ und
Das Komplement ist gegeben durch
$W = \langle v_1 \ldots v_{1-k} \rangle$ $\square$

Def: Zeilen, Spalten, Zeilenrang, Spaltenrang

19.10.24

- Seien $m, n \geq 1$ $A \in M_{m\times n}(K)$.
  Seien $u_1 ... u_m \in K^n$ Zeilen von A
  und $v_1 .... v_n \in K^m$ Spalten von A.

z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ Zeilen } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ Spalten } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Der Zeilenrang oder ZR von A ist
  $\text{Zeilenrang}(A) = ZR(A) = \dim \langle u_1 ... u_m \rangle \subseteq K^n$
  Der Spaltenrang oder SR von A ist
  $\text{Spaltenrang}(A) = SR(A) = \dim \langle v_1 ... v_n \rangle \subseteq K^m$

"Der Zeilenrang ist die Anzahl lin. unab. Zeilenvektoren in A. Der Spaltrang die Anzahl lin. unab. Spaltenvektoren in A"

Zeilenrang = Spaltenrang (Beweis in RZSF) 19.10.24

Sei $m,n \geq 1$ $A \in M_{m\times n}(K)$

Dann gilt

Zeilenrang(A) = Spaltenrang(A)

- Beweis dass $ZR(A) = SR(A)$, wenn A in RZSF.

A sei in RZSF und habe r führende Einsen. Dann gibt es offensichtlich r linear unabhängige Spaltenvektoren.

$\Rightarrow SR(A) = r$

Weiter gibt es genau r Zeilen die keine Nullzeilen sind. Wegen der Eigenschaft, dass jede Zeile die über einer gewissen Referenzzeile Einträge weiter links hat, wissen wir durch Induktion auch, dass diese nicht-Nullzeilen alle linear unabhängig sind. $\Rightarrow ZR(A) = r$

$ZR(A) = SR(A)$

Linerare Abbildungen & ~~Endomorphismus~~ 23.10.24

Eine Funktion $T: U \to W$ ist eine lineare Abbildung, wenn

(1) $T(\alpha v) = \alpha T(v) \quad \forall \alpha \in K \ \forall v \in V$

(2) $T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V$

Eine lineare Abbildung $T: V \to V$ ist ein Endomorphismus.

- Wir schreiben auch $T(v) = Tv$.
- $T: V \to W$ ist genau dann linear, wenn

$$T(\alpha v + \beta u) = \alpha Tv + \beta Tu \quad \forall \alpha, \beta \in K \ \forall v, u \in V$$

- Wenn $T: V \to W$ linear ist gilt

  (1) $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 Tv_1 + \dots + \alpha_n Tv_n$

  (2) $T(0_V) = 0_W$

- Wenn $V = \langle v_1 \dots v_n \rangle$ ist T durch $Tv_1, \dots Tv_n$ vollständig bestimmt.
- Sei V endl. dim. mit $V = \langle v_1 \dots v_n \rangle$, $w_1 \dots w_n \in W$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $T: V \to W$ s.d. $T(v_i) = w_i \ \forall 1 \le i \le n$

Def: Kern und Bild 23.10.24

Seien V, W K-VR. $T: V \to W$ ist linear.

(1) Kern von T ist „Menge aller v die auf 0_W bilden"

$$\ker(T) = \{v \in V \mid Tv = 0_W\}$$

(2) Bild von T ist „Menge aller w auf die gebildet wird"

$$\operatorname{im}(T) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ s.d. } Tv = w\}$$

Ausserdem gilt

- $\ker(T) \leq V$
- $\operatorname{im}(T) \leq W$

Proof: $T: V \to W$ mit V endl. dim VR. 23.10.24
Dann sind $\ker(T)$ & $\operatorname{im}(T)$ endl. dim

- $\ker(T)$ ist endl. dim, da $\ker(T) \subseteq V$ und V ist endl. dim
- Es sei $v_1, \dots v_n$ eine Basis von V. Dann ist $T(v_1), \dots T(v_n)$ ein erzeugendensystem von T und somit endlich. dimensional. $\square$

Rang einer linearen Abbildung und Dimension 28.10.24

- $T: V \to W$ sei eine lineare Abbildung.
Der Rang von T ist gegeben durch

$$rk(T) := \dim(im(T))$$

- Weiter sei V, W endl. dim VR/K dann gilt

$$\dim_K(V) = \dim_K(\ker(T)) + rk(T)$$
$$= \dim_K(\ker(T)) + \dim_K(im(T))$$

Beweis durch erstellen einer Basis von V, wobei wir die Basis von $\ker(T)$ zu einer von V erweitern und zeigen, dass die Erweiterungs-Vektoren dann ein Erzeugendensystem von $im(T)$. Zeige nun dass sie auch lin. unab sind.

Aussagen über Surjektivität, Injektivität und Bijektivität von linearen Abbildungen

28.10.24

$\ker(T) = \{0_V\} \iff T$ ist injektiv

$\operatorname{im}(T) = W \iff T$ ist surjektiv

Da keine zwei Werte doppelt abgebildet werden können und $0_V \in \ker(T)$ immer gilt. „$\Rightarrow$" $T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = 0_W$

$T(u-v) = 0_W$ gilt nur für $u - v = 0_V$

$\Rightarrow u = v$ $\square$

T sei lineare Abb. $T: V \to W$. Dann gilt

(1) $\dim(W) < \dim(V) \Rightarrow T$ ist nicht injektiv

(2) $\dim(W) > \dim(V) \Rightarrow T$ ist nicht surjektiv

(3) Wenn $\dim(W) = \dim(V)$ sind folgende äquivalent

T bijektiv $\iff T$ injektiv $\iff T$ surjektiv

Isomorphismus & Bijektive lineare Abbildung 28.10.24

Die lineare Abbildung $T: V \to W$ ist ein Isomorphismus, wenn es $S: W \to V$ gibt, s.d.:

$$S \circ T = id_V \quad \text{und} \quad T \circ S = id_X$$

In diesem Fall schreiben wir $S = T^{-1}$ und nennen T^{-1} die Inverse.

Wir schreiben $V \cong W$.

- Jede lineare Bijektion $T: V \to W$ ist ein Isomorphismus (bewiesen in Vorlesung!)

lin. Abb T ist iso $\iff [T]_B^B$ invertierbar 3.11.24

V sei ein endl. dim VR mit

Basis $B = (v_1 \dots v_n)$

$T : V \to V$ sei linear.

Dann gilt

T ist Isomorphismus $\iff [T]_B^B$ invertierbar

Proof:

„$\Leftarrow$" $A = [T]_B^B$ nimm an es gibt A^{-1}

z.z $L_{A^{-1}} \circ T = T \circ L_{A^{-1}} = id_V$

$$[L_{A^{-1}} \circ T]_B^B = [L_{A^{-1}}]_B^B [T]_B^B = A^{-1} A = \mathbb{1}_n = [id]_B^B$$

„$\Rightarrow$" $L_{A^{-1}} \circ T = id_V$

$$[L_{A^{-1}} \circ T]_B^B = [L_{A^{-1}}]_B^B [T]_B^B = A^{-1} A = id_V$$

d.h. A ist invertierbar mit inverse A^{-1} $\square$

Basiswechselmatrix

3.11.24

V sei endl. dim VR/K $B=(v_1 \dots v_n)$, $B'=(v_1' \dots v_n')$ sind Basen.

$$A = [id]_{B'}^{B} \in M_{n\times n}(K)$$

mit $A=(a_{ij})$ und $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i'$

A beschreibt die Vektoren von B ausgedrückt als Linearkombination von der Basis B'. A heisst <u>Basiswechselmatrix</u> von B nach B'.

Anschaulich gesagt wird ein Vektor v der in Basis von B dargestellt wird mit der Matrix

$[id]_{B'}^{B} v$ in denselben Vektor ausgedrückt in der Basis B' übersetzt. Um wieder zurück zu übersetzen, kann man die Inverse linksmultiplizieren $[id]_{B}^{B'} = [id]_{B'}^{B}$

Was ist $[T]^{B'}_{C'}$ im Bezug zu $[T]^{B}_{C}$ 3.11.24

$[T]^{B'}_{C'} = [id]^{C}_{C'} [T]^{B}_{C} [id]^{B'}_{B}$, wobei $[id]^{C}_{C'}$, $[id]^{B'}_{B}$ Basiswechselmatrizen sind.

$$\boxed{\text{folgt direkt aus } [S \circ T]^{A}_{C} = [S]^{B}_{C} [T]^{A}_{B}}$$

Äquivalente und Ähnliche Matrizen 3.11.24

- $A, B \in M_{m\times n}$ sind <u>äquivalent</u>, wenn
  $B = PAQ$ mit $P \in M_{m\times m}(K)$ und
  $Q \in M_{n\times n}(K)$ und P und Q invertierbar sind.

- $A, B \in M_{n\times n}(K)$ sind <u>ähnlich</u>, wenn
  $B = PAP^{-1}$ mit $P \in M_{n\times n}(K)$
  Den Ausdruck PAP^{-1} nennt man
  Konjugation von A durch P.

Ähnlichkeit und Äquivalenz (Matrizen) sind Äquivalenzrelationen (Beweis) 7.11.24

Beweis für Ähnlichkeit

-) Reflexivität: $A \sim A \Rightarrow A = \mathbb{1} A \mathbb{1}^{-1} = A$
-) Symmetrie: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$A \sim B \Leftrightarrow A = P^{-1} B P \Leftrightarrow P A P^{-1} = B \Leftrightarrow B \sim A$

-) Transitivität: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$B = P^{-1} A P \quad , C = Q^{-1} B Q$

$\Rightarrow \quad C = Q^{-1} P^{-1} A P Q = (PQ)^{-1} A P Q$

$\Leftrightarrow A \sim C$ $\square$

$ZR(A) = SR(A)$

fertig malen

$\mathrm{Hom}(V,W)$ 21.11.24

Es seien V,W K-VR.
Schreibe $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ für die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W.

$\mathrm{Hom}_K(V,W)$ hat dann die Struktur eines K-VR mit den Operationen.

(1) Es seien $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ Dann ist

$$(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \quad \forall v \in V$$

(2) ~~Es seien~~ $T \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ $\alpha \in K$. Dann ist

$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$$

Isomorphismus Lin. Abb $\to$ Matrizen (Dimension)

21.11.24

Seien V, W endl. dim K-VR und es sei
$B = (v_1 \dots v_n)$ ist Basis von V
$C = (w_1 \dots w_m)$ ist Basis von W
Dann ist die Abbildung

$$\psi^B_C : \mathrm{Hom}_K(V,W) \to M_{m \times n}(K)$$
$$T \mapsto [T]^B_C$$

linear und ein <u>Isomorphismus</u>.

Dieses Resultat ist Grundlegend wichtig. Es besagt, dass jede lineare Abbildung eindeutig als Matrix dargestellt werden kann und umgekehrt.
Dann ist auch klar, dass

$$\dim_K(\mathrm{Hom}_K(V,W)) = \dim_K(V)\dim(W)$$

Dualer Vektorraum, duale Basis

21.11.24

V sei ein K-VR. Der Dualraum von V ist der VR

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

Die Elemente in V^* heissen Linearformen und haben die Form $T: V \to K \quad \forall T \in V^*$

Wenn V endl. dim VR mit der Basis $B = (v_1 \dots v_n)$ ist, so ist v_i^* für $1 \leq i \leq n$ Basis von V^*. Dabei ist v_i^* folgendermaßen definiert

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Explizit bildet v_i^* $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ auf α_i ab.

Die Basis $B^* = (v_1^* \dots v_n^*)$ nennen wir duale Basis von V.

Relation duale Basiswechselmatrix zur Basiswechselmatrix 27.11.24

Sei V endl. dim K-VR mit den Basen $B = (v_1 \dots v_n)$ und $C = (w_1 \dots w_n)$

Dann gilt

$$[id]_{B^*}^{C^*} = \left([id]_C^B\right)^T$$

Auserdem gilt

$$[id]_{C^*}^{B^*} = \left[\left([id]_C^B\right)^{-1}\right]^T$$

Duale Abbildungen

21.11.24

Die Abbildung $T: V \to W$ sei in $\mathrm{Hom}_K(V,W)$

die duale Abbildung $T^*: W^* \to V^*$

$\varphi \mapsto \varphi \circ T$

ist gegeben durch

$$T^*(\varphi)(v) = \varphi(T(v))$$

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{\varphi} K$$
$$V^* \xleftarrow{T^*} W^*$$
$$\varphi \circ T \longleftarrow\!\shortmid \varphi$$

wobei $\varphi \in W^*$, $\varphi: W \to K$

$T^*(\varphi)$ ist ein Element von V^*, weshalb $T^*(\varphi)$ linear ist.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "S \circ T"'] & V \arrow[r, "S"] & W \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{tikzcd} U^* & V^* \arrow[l, "T^*"'] & W^* \arrow[l, "S^*"'] \arrow[ll, bend left, "T^* \circ S^* = (S \circ T)^*"] \end{tikzcd}}$$

Seien V, W endl.dim $/K$ mit Basen

$B = (v_1 \dots v_n)$ von V und $C = (w_1 \dots w_m)$ von W

Sei $T: V \to W$ linear, dann gilt

$$[T^*]^{C^*}_{B^*} = \left([T]^B_C\right)^T$$

Annilatoren - Def und Dim 27.11.24

Sei V VR, $U \leq V$ der Annolator von U ist die Menge aller $\ell \in V^*$ s.d. $U \subseteq \ker(\ell)$ d.h. $\ell(u)=0$ $\forall u \in U$ schreibe

$$U^\circ = \{\ell \in V^* \mid \ell(u) = 0 \ \forall u \in U\}$$

- U° ist UR von V^* $U^\circ \leq V^*$
- $\dim(U) + \dim(U^\circ) = \dim(V)$
- Seien V, W K-VR, $T: V \to W$ linear
  Dann gilt:
  1) $(\operatorname{im}(T))^\circ = \ker(T^*)$
  2) $(\ker(T))^\circ = \operatorname{im}(T^*)$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \ker(T) \leq V & \xrightarrow{T} & W \geq \operatorname{im}(T) \\ (\,)^\circ \downarrow & & \downarrow (\,)^\circ \\ \operatorname{im}(T^*) \leq V^* & \xleftarrow{T^*} & W^* \geq \ker(T^*) \end{array}}$$

- ausserdem gilt
  $\dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(\operatorname{im}(T^*))$
- T ist injektiv $\Leftrightarrow$ T^* ist surjektiv
- T ist surjektiv $\Leftrightarrow$ T^* ist injektiv

Bidualraum

28.11.24

Der Bidualraum von V VR/K (endl. dim)
ist gegeben als

$$V^{**} = (V^*)^*$$

- Es gilt natürlich
  $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V)$
- $\tau \in V^{**}$ hat die Form
  $\tau : V^* \to K$ also bildet τ Linearform auf K ab.

Dabei ist τ definiert als
$(\tau(v))(\ell) = \ell(v)$ für $\ell \in V^*$ und $v \in V$

- $\tau(v)$ ist linear und somit Element von V^{**}
- $B = (v_1 \dots v_n)$, $B^* = (v_1^* \dots v_n^*)$, $B^{**} = (v_1^{**} \dots v_n^{**})$
  Dann gilt $\tau(v_i) = v_i^{**}$
  da $(\tau(v_i))(v_j^*) = v_j^*(v_i) = \delta_{ij}$
  und $v_i^{**}(v_j^*) = \delta_{ij}$ per definition.
- B, C seien Basen von V, W
  $[T^{**}]^{B^{**}}_{C^{**}} = \left([T^*]^{C^*}_{B^*}\right)^T = \left([T]^B_C\right)^{TT} = [T]^B_C$

Reflexivität: Isomorphismus $\phi: V \to V^{**}$ 28.11.24

Sei V/K endl. dim VR. Dann definiert die Abbildung

$$\phi: V \to V^{**} \qquad v \mapsto \phi(v)$$

einen Isomorphismus zwischen V und seinem Bidualraum. Man sagt V ist reflexiv.

Ein Raum ist reflexiv wenn eine Abbildung in dessen Bidualraum ein Isomorphismus ist. Jeder endl. dim VR ist reflexiv.

Quotientenraum Def — 28.11.24

Der Quotientenraum von V durch U ist die Menge aller Nebenklassen von U und geschrieben als V/U. V/U ist K-VR mit

- $[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]$ und
- $\alpha[v] = [\alpha v]$

Dabei ist $[v]$ die von v erzeugte Nebenklasse von U. Es gilt
$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow [v_1] = [v_2]$ bzw $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow (v_1 - v_2) \in U$
d.h. v_1 und v_2 in diesen Äquivalenzklassen, wenn sie denselben Nebenklasse erzeugen.

- Sei $q_U : V \to V/U$ $v \mapsto [v]$ dann ist q_U linear und es gilt $\ker(q_U) = U$, $\mathrm{im}(q_U) = V/U$
- Es gilt $\dim V/U = \dim V - \dim U$
- Sei W ein Komplement von U in V.
  Dann definiert $q_U|_W : W \to V/U$, $w \mapsto [w]$ einen Isomorphismus. da $\ker(q_U) = \{0_V\}$ und $\mathrm{im}(q_U) = V/U$

erster Isomorphiesatz

1.12.24

Sei $T: V \to W$ linear. Definieren

$\overline{T}: V/_{\ker(T)} \to \operatorname{im}(T)$ als

$$\overline{T}([v]) = T(v)$$

Dann gilt

(1) $\overline{T}$ ist wohldefiniert

(2) $\overline{T}$ ist kanonischer Isomorphismus

(3) $\overline{T} \circ q_{\ker(T)} = T$

Permutationen & Transpositionen 4.12.24

Sei $n \geq 1$. Eine Permutation von $X = \{1, \dots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung

$\sigma: X \to X$

Wir schreiben $\sigma = (\sigma(1), \dots \sigma(n))$ eine Transposition ist eine Permutation, die genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen auf sich selbst abbildet.

! id ist keine Transposition.

Die Menge aller Permutationen sind eine Gruppe unter der Verknüpfung von Funktionen. Also eine Symmetrischen Gruppe S_n mit $n!$ Elementen

- Sei $\tau \in S_n$ eine Transposition. Dann gilt $\tau^2 = id$
- Jede Permutation sei die Verknüpfung von endlich vielen Transpositionen.

  ! nicht eindeutig, da id unterschiedlich dargestellt werden kann.

Gerade/ungerade Zerlegungen in Transpositionen 4.12.24

Es sei $\sigma \in S_n$ seien $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k = \tau_1' \circ \ldots \circ \tau_\ell'$ Zerlegungen in Transpositionen. Dann gilt $2 \mid (\ell - k)$. Dieses Ergebnis ist nicht trivial.

Weiter definieren wir $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ als <u>gerade</u>, falls $2 \mid k$ und als <u>ungerade</u>, falls $2 \nmid k$.

Ausserdem gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } \sigma \text{ ungerade} \end{cases}$$

d.h. $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$

und es gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \operatorname{sgn}(\sigma_2)$$

Die Menge aller geraden Permutationen in S_n ist eine Gruppe A_n (alternierend)

n-Linearität

4.12.24

Sei $f: M_{n\times n}(K) \to K$ eine Funktion.
f ist n-linear (in Spaltenvektoren), wenn $\forall\, 1 \leq i \leq n$ gilt $\forall \lambda \in K$ und $u \in K^n$

$$f(v_1 \dots v_i + u \dots v_n) = f(v_1 \dots v_i \dots v_n) + f(v_1 \dots u \dots v_n)$$

$$f(v_1 \dots \lambda v_i \dots v_n) = \lambda f(v_1 \dots v_i \dots v_n)$$

z.B.

- $0: M_{n\times n}(K) \to 0$
- $A = (a_{ij})$ $\quad f: A \mapsto a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$

Wenn $f, g: M_{n\times n}(K) \to K$ n-linear sind, so ist auch $\alpha f + \beta g$ mit $\alpha, \beta \in K$ n-linear.

Alternierende Funktionen

Eine Funktion $f: M_{n \times n}(K) \to K$ ist alternierend, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind: Wenn $v_i = v_{i+1}$ für ein $1 \leq i \leq n$ dann:

$$f(v_1 \dots v_n) = 0$$

Eigenschaften von n-linear und alternieren Funktionen

8.12.24

Sei $f: M_{n\times n}(K) \to K$ n-linear und alternierend.

Dann gilt:

(1) $f(v_1 \dots v_i, v_{i+1} \dots v_n) = -f(v_1 \dots v_{i+1}, v_i \dots v_n)$

Beweis durch $f(v_1 \dots v_i + v_{i+1}, v_i + v_{i+1} \dots v_n) = 0$.

(2) Wenn $v_i = v_j$ für $i \neq j$, dann gilt

$f(v_1 \dots v_n) = 0$

Beweis (1) & vertauschen bis nebeneinander

(3) $f(v_1 \dots v_i \dots v_j \dots v_n) = -f(v_1 \dots v_j \dots v_i \dots v_n)$

Beweis genau wie bei (1) und mit Hilfe von (2).

Determinantenfunktion

8.12.24

Eine Funktion $D: M_{n\times n}(K) \to K$ ist eine Determinantenfunktion, wenn gilt:

(1) D ist alterierend

(2) D ist n-linear

(3) $D(\mathbb{1}_n) = 1$

Wir definieren $A_{ij} \in M_{n-1\times n-1}(K)$ als die $A=(a_{ij}) \in M_{n\times n}(K)$ Matrix, bei der wir die i-te Zeile und j-te Spalte herausstreichen

---

Wir haben gezeigt, dass

- Sei $n \geq 1$. Dann gibt es eine Det-Fkt $D: M_{n\times n}(K) \to K$

- Sei $n \geq 1$. Dann existiert genau eine Determinantenfunktion $D: M_{n\times n}(K) \to K$

Explizit ist $D(A)$ mit $A=(a_{ij})$ $1 \leq i,j \leq n$ gegeben durch

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n}$$

Summe aus $n!$ Summanden mit jeweils n Faktoren. $\rightsquigarrow$ Rechenintensiv.

Beweis: $sgn(\sigma)$ ist eindeutig 8.12.24

Sei $\sigma \in S_n$ und

$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k = \tau'_1 \circ \dots \circ \tau'_m$

Zwei zerlegungen in Transposition.

Dann gilt $2 | (k-m)$

Beweis: Sei $D: M_{n\times n}(K) \to K$ Det. Fkt.

$e_1 \dots e_n$ Standardbasis von K^n

σ kann durch k Transposition geschrieben werden. Wir kamen also mit k vertauschungen von

$\mathbb{1}_n$ zu $(e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)} \dots e_{\sigma(n)})$

Das leisst $D(e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(n)}) = (-1)^k$

Da aber auch m vertauschungen zur gleichen Matrix führen muss gelten

$(-1)^k = (-1)^m \Rightarrow 2 | (k-m)$

Einige Eigenschaften der Determinante 11.12.24

Für alle folgenden sei $D: M_{n\times n}(K) \to K$ n-linear und alternierend.

- Es gilt $D(A) = \det(A)\, D(\mathbb{1}_n)$
- Es gilt $\det(A) = \det(A^T)$
- Die Determinantenfunktion ist auch n-linear und alternierend bezüglich Zeilenvektoren.
- B lasse sich von A und endlicher Anwendung der EZUs konstruieren. Es gelte $A = XB$
  - (1) Wenn $X = P(r,s)$ dann $\det(B) = -\det(A)$
  - (2) Wenn $X = M(r,\lambda), \lambda \in K$ dann $\det(B) = \lambda \det(A)$
  - (3) Wenn $X = S(r,s,\lambda)\ \lambda \in K$ dann $\det(B) = \det(A)$
- Wenn $M \in M_{n\times n}(K)$ die Form $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{s\times r} & C \end{pmatrix}$ und $A \in M_{r\times r}(K)$, $B \in M_{r\times s}(K)$ und $C \in M_{s\times s}(K)$, dann gilt $\det(M) = \det(A)\det(C)$.
- Wenn $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(K)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$.
- Sei $A, B \in M_{n\times n}(K)$, dann gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Weitere Eigenschaften der Determinantenfkt 15.12.24

- Wenn $A \in GL_n(K)$ (invertierbare Matrix), dann ist $\det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- Ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante
- Wenn K ein unendlicher Körper ist, gibt es unendlich viele Äquivalenzklassen ähnlicher Matrizen.
- A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

Kofaktormatrix und adjunkte Matrix 15.12.24

Für $1 \leq i,j \leq n$, schreibe $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.
Kofaktormatrix von A ist die Matrix $C = (c_{ij})$
Adjunkte Matrix von A ist $\operatorname{adj}(A) = C^T$

- Wenn $A \in M_{n \times n}(K)$. Dann gilt
  $A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) A = \det(A) \mathbb{1}_n$

- Wenn $\det(A) \neq 0$ gilt
  $A^{-1} = \det(A)^{-1} \operatorname{adj}(A)$

Determinante eines Endomorphismus 15.12.24

Es sei $T: V \to V$ ein Endomorphismus.
Sei B Basis von V. Definiere

$$\det(T) = \det([T]_B^B)$$

- Wenn C eine andere Basis ist, gilt

$$\det(T) = \det([T]_C^C) = \det([T]_B^B)$$

- Der Wert $\det([T]_C^B)$ ist nicht wohldefiniert.

- Wenn V endl. dim gilt
  (1) $\det(S \circ T) = \det(S)\det(T)$
  (2) T isomorphismus $\iff \det(T) \neq 0 \Rightarrow \det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$
  (3) $\det(0) = 0$ und $\det(id_V) = 1$