

Fibonacci Folge (Rekursive Def + Eigenschaften) 18.9.24

Def: Eine Fibonacci Folge ist eine Folge $\mathcal{F}_{a,b} = (a_n)$, wobei $a_0 = a$ und $a_1 = b$ gilt.

$$a_0 = a$$

$$a_1 = b$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\text{für alle } n \geq 2)$$

Es gilt für alle $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in V$, wobei V die Menge aller Fibonacci Folge ist und $\mathcal{F} = (a_n)$ und $\mathcal{G} = (b_n)$ gilt, dass

$$(I) \mathcal{F} + \mathcal{G} = (a_n + b_n)$$

$$(II) \alpha \mathcal{F} = (\alpha a_n)$$

Außerdem gilt

$$(I) \mathcal{F}_{a,b} + \mathcal{F}_{c,d} = \mathcal{F}_{a+c, b+d}$$

$$(II) \alpha \mathcal{F}_{a,b} = \mathcal{F}_{\alpha a, \alpha b}$$

Außerdem gibt es für alle $\mathcal{F} \in V$ $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$\mathcal{F} = a \cdot \mathcal{F}_{0,1} + b \cdot \mathcal{F}_{1,0}$$

Symmetrische Abbildung 18.9.24

Eine Abbildung $T: V \rightarrow V$ ist eine Symmetrie, wenn

$$(I) \quad T(F+G) = T(F) + T(G)$$

$$(II) \quad T(\alpha F) = \alpha T(F)$$

Eigenfolge und Eigenwert 18.9.24

Es sei $T: V \rightarrow V$ eine Symmetrie.

Eine Folge $f \in V$ mit $f \neq f_0$

ist eine Eigenfolge von T , wenn

$T(f) = \alpha f$ ist, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ist
und Eigenwert genannt wird.

von T

V ist hier
die Menge aller
Fib-Folgen

Ablauf zur expliziten Fib.-Folge 18.9.24

1. Finde zwei Fibonacci-Folgen, welche durch geometrische Folgen einfach explizit formuliert werden können.
↳ $F_{1,\varphi}$ und $F_{1,\psi}$, wobei $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ die Goldenen Schnitte sind.
2. Zeige $F_{0,1}$ und $F_{1,0}$ durch $F_{1,\varphi}$ und $F_{1,\psi}$ ausgedrückt werden können.
3. Setze für die Ausdrücke in $F_{1,\varphi}$ und $F_{1,\psi}$ deren explizite Form ein.

Definition Teilmenge, strikte Teilmenge Anzahl Teilungen 21.9.24

P, Q seien Mengen.

- (I) P ist eine Teilmenge von Q , wenn $\forall p \in P: p \in Q$. Also wenn alle Elemente aus P auch in Q zu finden sind. Man schreibt $P \subseteq Q$. 
- (II) P ist eine strikte Teilmenge von Q , wenn $\forall p \in P: p \in Q$ und $P \neq Q$. Also wenn alle Elemente in P auch in Q sind, aber in Q noch zusätzlich andere Elemente sind. $\exists q \in Q: q \notin P$. Man schreibt $P \subsetneq Q$.
- (III) Schreibe $P \not\subseteq Q$ wenn P keine Teilmenge von Q ist. $\exists p \in P: p \notin Q$.

Beachte: Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen. Für jedes Element gibt es die Option in der Teilmenge zu sein oder nicht. Dabei ist die leere Menge $\emptyset$ immer eine Teilmenge.

Def: Schnittmenge, Vereinigungsmenge und Komplement 21.09.24

P, Q seien Mengen.

- (I) Die Schnittmenge $P \cap Q = \{x \mid x \in P \text{ und } x \in Q\}$
 - (II) Die Vereinigungsmenge $P \cup Q = \{x \mid x \in P \text{ oder } x \in Q\}$
 - (III) P ohne Q : $P \setminus Q = \{x \mid x \in P \text{ und } x \notin Q\}$
 - (IV) Wenn $Q \subseteq P$ sagt man zu $P \setminus Q$
Das Komplement von Q in P .
Man schreibt Q^c
-

Sei $\mathcal{A}$ eine Familie (Menge) von Mengen mit $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Die Vereinigungsmenge: $\bigcup_{M \in \mathcal{A}} M = \{x \mid \exists M \in \mathcal{A} : x \in M\}$

Die Schnittmenge: $\bigcap_{M \in \mathcal{A}} M = \{x \mid \forall M \in \mathcal{A} : x \in M\}$

Def: Cartesisches Produkt 21.9.24

X, Y seien Mengen. Das Cartesische Produkt

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

Sei die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in X$ $y \in Y$.

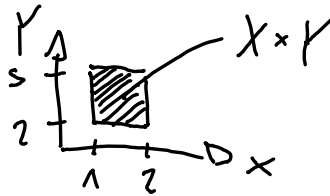
Bsp: $X = \{1, 2\}$

$$Y = \{1, 2, 3\}$$

$$X \times Y = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

Oder $X = [1, 2]$

$$Y = [2, 5]$$



Weiter ist $X^n = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ mal}}$

Def: Funktion

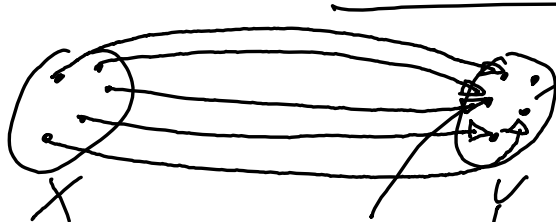
21.9.24

X, Y seien Mengen

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist eine Relation die jedem Element aus X genau ein Element aus Y zuordnet.

$f(x) \in Y$ man schreibt $x \mapsto f(x)$

Dabei wird X 'DefinitionsMenge' genannt und Y die 'Zielmenge'



es müssen nicht
zwingend alle
 $y \in Y$ eine entsprechende
Zuordnung aus X haben.

Elemente aus $y \in Y$ können
unter Umständen doppelt belegt sein.

Zwei Funktionen: $f: X \rightarrow Y$ und $g: X' \rightarrow Y'$
sind gleich ($f = g$), wenn gilt:

(I) $f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$

(II) $X = X'$

(III) $Y = Y'$

Falls ein der Bedingungen nicht erfüllt ist, gilt

$$f \neq g$$

Def: Beschränkung einer Funktion 21.9.24

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion.

$A \subseteq X$

Die Beschränkung von f auf A ist die Funktion

$$\begin{array}{l} f|_A: A \rightarrow Y \\ \quad \cup \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array}$$

gleiche Abbildung mit
andere Definitionsmenge
 $\hookrightarrow$ andere Funktion

Def: injektiv, surjektiv, bijektiv 21.9.24

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion

(I) f ist injektiv, wenn $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ gilt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$. Also wenn kein Output durch zwei verschiedenen Inputs belegt ist.

(II) f ist surjektiv, wenn $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$ also gibt es für jeden Output mindestens einen Input

(III) f ist bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist
 $\forall y \in Y \exists! x \in X: f(x) = y$

Es gibt also für jeden Output genau einen Input.

Def: Inverse und Komposition

(I) Sei $f: X \rightarrow Y$ bijektiv.

Die inverse Funktion von f , $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ist die Funktion die $y \in Y$ auf das $x \in X$ abbildet, für das gilt $f(x) = y$.

(II) $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sind Funktionen.

Die Komposition $g \circ f$ ist die Funktion

$$g \circ f: X \rightarrow Z$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$$

Bsp: Sei $f: X \rightarrow Y$ bijektiv.

Dann gilt

$$(I) f^{-1} \circ f = id_X$$

$$(II) f \circ f^{-1} = id_Y$$

$\Rightarrow g \circ f$ ist nicht
zwingen $f \circ g$.

Def: Körper + Körperaxiome 25.9.24

Ein Körper (eng: field) ist eine Menge $K \neq \emptyset$ mit zwei Abbildungen

$$+: K \times K \rightarrow K$$

$$\cdot: K \times K \rightarrow K$$

mit zwei Elementen, die wir 0 und $1 \in K$ nennen und $1 \neq 0$ gilt, gelten die folgenden 9 Eigenschaften oder Körperaxiome genannt

I) Assoziativität von $+$:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\forall x, y, z \in K$$

II) Kommutativität von $+$:

$$x + y = y + x \quad \forall x, y \in K$$

III) neutrales Element von $+$:

$$x + 0 = 0 + x = x \quad \forall x \in K$$

IV) Additives Inverses:

$$\forall x \in K \exists x' \in K: x + x' = 0$$

$$\hookrightarrow \text{schreibe } x' = -x$$

V) Assoziativität von $\cdot$:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$\forall x, y, z \in K$$

VI) Kommutativität von $\cdot$:

$$x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in K$$

VII) neutrales Element von $\cdot$:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall x \in K$$

VIII) Multiplikatives Inverses:

$$\forall x \in K, x \neq 0 \exists \tilde{x} \in K: x \cdot \tilde{x} = 1$$

$$\hookrightarrow \text{schreibe } \tilde{x} = x^{-1}$$

IX) Distributivität

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$\forall x, y, z \in K$$

Restklassenkörper modulo einer Primzahl 23.9.24
Beweis: ist Körper

Sei p eine Primzahl der Körper
 $\mathbb{F}_p$ ist folgendermassen definiert:

$$\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$$

Für $x, y \in \mathbb{F}_p$ definieren wir $x+y \in \mathbb{F}_p$
als den Rest der Division $\frac{x+y}{p}$.

Ebenso ist $x \cdot y \in \mathbb{F}_p$ definiert als den
Rest von $\frac{x \cdot y}{p}$.

Beweis: das $\mathbb{F}_p$ -te Körperaxiom ist das einzig
nicht triviale. $\rightarrow$ multiplikative Inverse
Idee

$$M = \{1 \cdot x, 2 \cdot x, \dots, (p-1) \cdot x\} \quad x \in \mathbb{F}_p, x \neq 0$$

1) kein Element von M ist durch p teilbar.

$$\hookrightarrow p \nmid x \cdot i \Rightarrow p \nmid x \vee p \nmid i \quad \text{da } 1 \leq x, i < p \quad \checkmark$$

2) keine zwei Elemente von M haben den gleichen Rest
bei Division durch p .

$$\hookrightarrow ix \text{ und } jx \text{ haben gleichen Rest} \Leftrightarrow p \mid (i-j)x \Rightarrow p \mid x \vee p \mid i-j$$
$$\text{mit } 1 \leq x, i, j < p \Rightarrow p \nmid x$$
$$\Rightarrow i-j=0 \Leftrightarrow i=j \quad \checkmark$$

3) wir haben $p-1$ Elemente, welche auf $p-1$
'Boxen' aufgeteilt werden. Wir haben gezeigt, dass
jede Box maximal einmal belegt ist

$\hookrightarrow$ Pigeonhole-Principle $\Rightarrow$ Es gibt für jedes $x \in K$
ein Inverses $x^{-1} \in K$. $\square$

! wenn $\mathbb{F}_n$ und n keine Primzahl ist,
ist $\mathbb{F}_n$ kein Körper. Das lässt sich einfach
dadurch zeigen, dass die Primfaktoren von
 n in $\mathbb{F}_n$ sind. $\rightarrow$ Das multiplikative Inverse
für alle Zahlen mit gemeinsamen Primfaktoren
gibt es nicht. wie n

Def: kommutativer Ring

25.9.24

kommutativer

Eine Menge R ist ein Ring, wenn für ihn alle Körperaxiome außer IX (multiplikatives Inverses) gelten.

z.B. • $\mathbb{Z}$

- Restklassen bei Division durch $n \in \mathbb{N}, n > 1$

Matrix, Zeilenvektor, Spaltenvektor, Null-Matrix, z.B. $\mathbb{Z}^n$
Identitätsmatrix, Addition, Skalarmultiplikation, quadratisch

$m, n \geq 1$. K sei ein Körper. Eine $(m \times n)$ -Matrix A mit Werten in K ist eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten.

Schreibe

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad M_{m \times n}(K) = \{(m \times n)\text{-Matrizen mit Wert in } K\}$$

- I) A ist quadratisch wenn $m = n$
- II) eine $(1 \times n)$ -Matrix ist ein Zeilenvektor $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$
- III) eine $(n \times 1)$ -Matrix ist ein Spaltenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- IV) $0_{m \times n}$ ist eine $(m \times n)$ -Matrix voller Nullen
- V) 1_n ist eine quadratisch $(n \times n)$ -Matrix mit Einsen auf der Diagonale, ansonsten nur Nullen $\rightarrow$ Identitätsmatrix
- VI) $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \quad A + B \in M_{m \times n}(K)$
 $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- VII) $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K) \quad \alpha \in K$
 $\alpha A \in M_{m \times n}(K)$
 $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$

Produkt zweier Matrizen 28.9.24

Das Produkt zweier Matrizen $A \in M_{m \times n}(K)$ und $B \in M_{n \times p}(K)$ ist definiert, wenn die Anzahl Spalten der ersten Matrix der Anzahl Zeilen der zweiten Matrix entspricht.

Die resultierende Matrix C ist in $M_{m \times p}(K)$ hat also gleiche Zeilenzahl wie A und gleiche Spaltenzahl wie B .

$$C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Es gilt:

(1) Assoziativität: Die Klammersetzung ist egal
 $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad \forall A \in M_{m \times n}(K), B \in M_{n \times p}(K), C \in M_{p \times q}(K)$

(2) Distributivität: Ausmultiplizieren der Klammerterme
 $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \forall A \in M_{m \times n}(K), B, C \in M_{n \times p}(K)$

(3) Skalare können frei bewegt werden (Skalarverträglichkeit)
 $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \quad \forall A \in M_{m \times n}(K), B \in M_{n \times p}(K), \alpha \in K$

(4) Wenn $A \in M_{m \times n}(K)$ und $B \in M_{n \times p}(K)$ sind, ist BA nur definiert, wenn $p = m$ ist.

$$\Rightarrow AB \in M_{m \times m}(K), BA \in M_{n \times n}(K)$$

Wenn $m = n = p$ gilt

$AB, BA \in M_{n \times n}(K)$ aber mit $n=1$ nicht immer $AB = BA$

Inverse einer Matrix 28.9.24

Ein Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ ist invertierbar, wenn

$$\exists B \in M_{n \times n}(K): AB = BA = I_n.$$

Wenn A invertierbar ist gibt es genau eine Matrix B welche wir Inverse von A nennen und $B = A^{-1}$ schreiben.

- $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

- Wenn $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Diagonalmatrix, obere / untere Dreiecksmatrix 28.9.24

Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$

- A ist diagonal, wenn $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$
↳ also wenn nur auf der Diagonale Einträge sind, ansonsten nur Nullen.
- A ist eine obere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0 \forall i > j \rightarrow$ alle Non-Zero Beiträge sind oben rechts.
- A ist eine untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0 \forall j > i \rightarrow$ alle Non-Zero Beiträge sind unten links.

Bei der Multiplikation zweier gleichförmiger Matrizen, wird diese Form (diagonal/obere/untere) bewahrt.

Elementar Zeilenoperationen EZU 28.9.24

Sei $A \in M_{m \times n}(K)$. Die EZUs auf A sind:

- $P(r, s)$ für $1 \leq r, s \leq m$: Vertauschen der Zeilen r und s .
- $M(r, \lambda)$ für $1 \leq r \leq m, \lambda \in K, \lambda \neq 0$: Multiplikation der Zeile r mit λ

- $S(r, s, \lambda)$ für $1 \leq r, s \leq m, \lambda \in K, \lambda \neq 0$:
Multiplikation der Zeile r mit λ und
anschliessende Addition in Zeile s .

A und A' sind Zeilenäquivalent, wenn man
 A' aus A und endlich vielen Anwendungen der
EZUs erhält bzw. erhalten kann.

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{P(2,3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{M(1,-1)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{S(2,1,2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

$P(2,3) \quad M(1,-1) \quad S(2,1,2)$

A und A' sind Zeilenäquivalent.

Beweis: Jede Matrix ist Zeilenäquivalent zu einer Matrix in RZF + RZSF 2.10.24

Finde A' von $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $A \in M_{m \times n}(K)$,
so dass A' in RZF ist und A' durch
endlich viele EZUs von A konstruiert
werden kann.

- (1) Wenn in einer Zeile nur Nullen sind
stach wir fertig mit dieser Zeile
- (2) Das erste Element welches nicht Null ist
sei a_{ij} .
- (3) Werde $M(I, a_{ij}^{-1})$ an um es zu
einer Eins zu machen. Weiter werden
 $S(I, i, -a_{is})$ in allen Zeilen $i \neq I$ angewendet.

So haben wir aus A und endlich
vielen EZUs ein A' in RZF o.B.d.A. gebaut. $\square$

Um A' in RZF als A'' in RZSF zu
schreiben können wir $P(r, s)$ endlich oft
anwenden. $\square$

Def: Reduzierte Zeilenstufenform RZSF 2.10.24

Eine $(m \times n)$ -Matrix ist in RZSF, wenn

(1) Die Matrix in RZF ist. (RZSF ist also eine ergänzende Anforderung zu RZF)

$$\text{RZSF} \Rightarrow \text{RZF} \quad \text{RZF} \not\Rightarrow \text{RZSF}$$

(2) Alle Zeilen voller Nullen sind unten.

(3) Die führende Eins einer Zeile liegt rechts von der führenden Eins aus der Zeile darüber.

RZF

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

endlich

$\Rightarrow$ Anwenden von $P(s,r)$ $\Rightarrow$

RZSF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

(homogene) lineare Gleichungssysteme - LGS ^{2.10.21}

↳ erweiterte Matrizen

$m, n \in \mathbb{N}$, a_{ij} und b_j seien bekannt, x_j sind Unbekannte. Wir haben m Gleichungen der folgenden Form

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_j \quad a_{ij} \in K$$

Wir können das Gleichungssystem schreiben als

$$(S): Ax = b, \text{ wobei } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(K)$$

$$b = (b_j)_{1 \leq j \leq n} \in M_{n \times 1}(K)$$

$$x = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in M_{n \times 1}(K)$$

- Falls $b = 0$, wird das LGS homogen genannt.

Wir schreiben die Lösungsmenge des LGS als

$$L(S) = \left\{ (x_j) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x \in K : Ax = b \right\}$$

- Die erweiterte Matrix $A|b$ ist die $(m \times (n+1))$ -Matrix, wobei als $(n+1)$ -te Spalte der b -Vektor hat.
- Das LGS $Ax = b$ wird bestimmt durch $A|b$. Wenn $b = 0$ ist $A|b = A|0 = A \leadsto$ homogen

Beweis: $L(S') = L(S)$ wenn (S) und (S')
zeilenäquivalent sind

2.10.24

- Es reicht den Satz zu zeigen, wenn (S') durch (S) und EZUs konstruiert wurde.
- Da wir keine Bedingungen für (S') bzw. (S) haben reicht es, wenn wir $L(S') \subseteq L(S)$ zeigen, denn daraus können wir $L(S') \supseteq L(S)$ auch zeigen bzw. $L(S') = L(S)$ folgen.

Z.Z: Egal welche EZU angewendet wird, $L(S)$
bzw. $L(S')$ bleibt gleich.

- $P(r,s), M(r,\lambda)$ sind trivial. $\rightarrow$ normale Gleichungen
- $S(r,s,\lambda)$ einziger Unterschied ist in Zeile s :

$$A|B \rightarrow S(r,s,\lambda) \rightarrow A'|B'$$

$$a'_{sj} = a_{sj} + \lambda a_{rj} \quad b'_j = b_j + \lambda b_r$$

Es sei $x \in L(S)$, so dass gilt

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

Dann gilt

$$a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n + \lambda(a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n) = b_s + \lambda b_r$$

Das bedeutet, $L(S') = L(S)$ und zwei
zeilenäquivalente LGS haben die selbe
Lösungsmenge. □

$\hookrightarrow$ Tendentiel sind LGS in RZSF am einfachsten
zu lösen.

RZF

Eine Matrix ist in reduzierter Zeilenform, wenn sie

- (1) Als erstes Wert in einer Zeile, der von Null verschieden ist eine Eins hat (führende Eins)
- (2) Wenn es in der Spalte, welche zur führenden Eins (aus (1)) gehört ausserdem nur Nullen hat.

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Def Vektorräume

6.10.29

Sei K ein Körper. Ein Vektorraum über K ist eine Menge V mit zwei Operationen/Abbildungen:

$$+ : V \times V \rightarrow V \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2 \text{ "Vektoraddition"}$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \text{ "Skalarmultiplikation"}$$

Folgende Vektorraum-Axiome sind erfüllt.

Vektoraddition

$$(VR1) \forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

$$(VR2) \forall v_1, v_2, v_3 \in V : v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$$

$$(VR3) \exists 0_V \in V : v + 0_V = 0_V + v = v, \forall v \in V$$

$$(VR4) \forall v \in V \exists ! w \in V : v + w = 0_V \quad "w = -v"$$

Skalarmultiplikation

$$(VR5) \forall v_1, v_2 \in V \forall \lambda \in K : \lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$$

$$(VR6) \forall v \in V \forall \lambda, \mu \in K : (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

$$(VR7) \forall v \in V \forall \lambda, \mu \in K : (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda(\mu \cdot v)$$

$$(VR8) \forall v \in V : 1 \cdot v = v$$

Im Vergleich zum Körper fällt auf, dass die folgenden Axiome nicht erfüllt sein müssen:

(1) multiplikatives inverses existiert.

(2) $\cdot : V \times V \rightarrow V$ ist nicht definiert.

Beweis: Es gibt nur (einen Nullvektor / additives Inverses) 6.10.24
in einem Vektorraum

(1) Nimm an es gibt 0_v und $0_v'$, die beide (UR3: Existenz des Nullvektors) erfüllen. Dann gilt, dass

$$0_v = 0_v + 0_v' = 0_v'$$

weil $0_v'$ (UR3) erfüllt. weil 0_v (UR3) erfüllt. □

(2) Nimm an es gibt w und w' die (UR4: Existenz des additiven Inversen) erfüllen. Dann gilt

$$\begin{aligned} v + w + w' &= (v + \overset{\nearrow 0_v}{w}) + w' = w' \\ &= (v + \overset{\nearrow 0_v}{w'}) + w = w \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w' = w$$

□

Def: Unterräume

6.10.24

Sei K -VR und $U \subseteq V$ ist ein Unterraum von V , wenn

$$(VR0) \quad U \neq \emptyset$$

$$(VR1) \quad \forall u, v \in U \text{ gilt } u+v \in U$$

$$(VR2) \quad \forall u \in U, \lambda \in K \text{ gilt } \lambda u \in U$$

Das Gesetz (VR1) besagt, dass U bezüglich der Vektoraddition abgeschlossen ist und (VR2) besagt, dass U bezüglich der Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

↳ Schreibe $U \subseteq V$ (kleiner-Gleich)

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn gilt

$$(1) \quad 0_V \in U$$

$$(2) \quad \forall u, v \in U, \lambda \in K \text{ gilt } u + \lambda v \in U$$

Der Beweis zu (1) folgt aus $U \neq \emptyset$ und $\lambda u \in U$ mit $\lambda = 0$ und $0 \cdot v = 0_V$.

Der Beweis zu (2) folgt aus $\lambda v \in U$ und $u + v \in U$.

Linearkombinationen, lineare Hülle, 9.10.24 linear abhängig/unabhängig

- V sei ein K -VR und $v_1, \dots, v_n \in V$.
ein Element von V , von der Form
 $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, $\alpha_i \in K$ ist eine
Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_n$.
- Die lineare Hülle von $S \subseteq V$ sei definiert
als
$$\langle S \rangle = \{ v \in V \mid \exists n \geq 1, v_1, \dots, v_n \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, \text{ so dass } v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \}$$

 $\hookrightarrow$ Menge aller möglichen Linearkombinationen.

ACHTUNG: S kann unendlich viele Elemente
enthalten, aber es sind nur
endliche Summen erlaubt.

- V sei ein K -VR und $v_1, \dots, v_n \in V$.
Dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, wenn gilt

$$0_V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Falls es neben $\alpha_i = 0$ noch andere Lösungen gibt,
sind $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear abhängig.

Endlich dimensionaler VR, erzeugendes System 9.10.24

Anzahl Dimensionen eines VR

- V ist endlich-dimensional, wenn es endlich viele Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ gibt, so dass jeder $v \in V$ als Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_n$ geschrieben werden kann.

Man schreibt dann $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$

- Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ werden dann erzeugendes System von V genannt.
- Die Dimension eines Vektorraumes ist gegeben als die kleinste mögliche Zahl der Vektoren im erzeugenden System, so dass $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ ist. V ist dann ein n -dimensionaler VR.

↳ sobald aber $v_1, v_2, \dots, v_{n'}$ nicht mehr linear unabhängig sind, entspricht n' nicht der Anzahl Dimensionen.

Austauschlemma / Austauschsatz 13.10.24

- Das Austauschlemma besagt, dass wenn V endl. dim VR ist mit $v_1, \dots, v_n$ als Basis, so ist $v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_n$ auch eine Basis von V , wenn $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_j v_j + \dots + \alpha_n v_n$ mit $\alpha_j \neq 0$.
- Der Austauschsatz besagt, dass mit gegeben V und $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_h$ in V , wobei $w_1, \dots, w_h$ lin. unab. sind, $h \leq n$ und $(n-h)$ Basisvektoren (aus $v_1, \dots, v_n$) zusammen mit $w_1, \dots, w_h$ eine Basis von V sind.

Dimension eines Vektorraums

17.10.24

Sei V endlich dimensional.

Die Dimension von V ist die Anzahl Elemente in seiner Basis.

Wenn V nicht endlich dimensional ist, ist er unendlichdimensional und wir schreiben

$$\dim_K V = \infty$$

" V über K "

V sei ein VR/ K mit $\dim_K V = n < \infty$.

Folgende Aussagen sind äquivalent

- (I) $v_1, \dots, v_n$ sind Basis
- (II) $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig
- (III) $v_1, \dots, v_n$ sind erzeugendes System
 $\hookrightarrow \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$

Prop Unterräumen von endl. dim VR sind endl. dim 17.10.21

U endl. dim VR K , $U \leq V$.

Dann ist U endl. dim und es gilt

$$\dim_K U \leq \dim_K V$$

mit Gleichheit nur wenn $U=V$

Proof: Sei $\dim_K V = n$

- Wenn $U = \{0_V\}$ ist $\dim_K U = 0 \leq n$
- Wenn $U \neq \{0_V\}$ gibt es ein $u_1 \in U: u_1 \neq 0_V$

$\Rightarrow$ Falls $\langle u_1 \rangle = U$ ist $\dim_K U = 1$

$\Rightarrow$ anderenfalls: $\exists u_2 \in U \setminus \langle u_1 \rangle$

Da u_1 und u_2 linear unabhängig sind,
lässt sich dieser Prozess maximal
 n -mal wiederholen. $\Rightarrow$ Es resultiert

on $U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$, wobei $k \leq n$.

und $\dim_K U = k \leq n = \dim_K V$

$\Rightarrow \dim_K U \leq \dim_K V$

□

$\dim_n(U+W)$, Verall. dim VR/n $U, W \subseteq V$ 17.10.24

U sei ein endl. dim VR/n. U und W sind VR von V . Dann gilt

$$\dim_n(U+W) = \underbrace{\dim_n(U)}_{\uparrow} + \underbrace{\dim_n(W)}_{\uparrow} - \dim(U \cap W)$$

$$U = \langle u_1 \dots u_p \rangle \quad W = \langle w_1 \dots w_m \rangle$$

Falls $w_i \in U \rightarrow$ doppelt gezählt

Alle w_i die doppelt gezählt wurden

$$\text{stehen } \langle w_1 \dots w_r \rangle = U \cap W$$

$\hookrightarrow$ Da sie nur doppelt gezählt werden, wenn sie in der linearen Hölle von W sind und in der von U .

V endl. dim $\mathbb{R}^n$ $U, W, X \subseteq V$ $\dim(U+W+X)$? 19.10.29

Es gibt eine Formel für

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Mit dem Ansatz $U' = U+W$

kann man parallel dazu $\dim(U' + X) = \dim(U+W+X)$ bestimmen. Dabei erhält man u.a. einen Term

$\dim((U+W) \cap X)$. Da dieser jedoch allgemein nicht mit $\dim((U \cap X) + (W \cap X))$ gleichzusetzen ist, gilt nicht

$$\begin{aligned} \dim(U+W+X) &= \dim(U) + \dim(W) + \dim(X) \\ &\quad - \dim(U \cap W) - \dim(W \cap X) - \dim(U \cap X) \\ &\quad + \dim(U \cap W \cap X) \end{aligned}$$

Es gibt keine Formel für die Dimension dreier Unterräume.

z.B. $V = \mathbb{R}^2$ $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $X = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$\rightarrow$ Formel ergibt $\dim(U+W+X) = 3$

wobei $\dim(U+W+X)$ offensichtlich 2 ist

$$2 \neq 3 \quad \text{!}$$

Def: Komplement eines UR

19.10.24

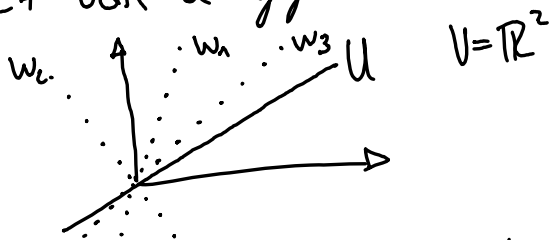
Proof das immer ein Komplement existiert

- Sei V K -VR, $U \subseteq V$ ein Unterraum $W \subseteq V$ ist ein Komplement von U , wenn gilt

(1.) $V = W + U$

(2.) $U \cap W = \{0_V\}$

Achtung: Es ist nicht wahr, dass das Komplement von U gegeben ist durch $V - U$.



Satz: Für jeden Unterraum gibt es mindestens ein Komplement.

Beweis: Sei $u_1 \dots u_n$ Basis von U .
Wir erweitern zu einer Basis von V mit $v_1 \dots v_{n-k}$. Dann ist

$V = \langle u_1 \dots u_n, v_1 \dots v_{n-k} \rangle$ und
Das Komplement ist gegeben durch
 $W = \langle v_1 \dots v_{n-k} \rangle$

□

Def: Zeilen, Spalten, Zeilenrang, Spaltenrang 19.10.24

- Seien $m, n \geq 1$ $A \in M_{m \times n}(K)$.

Seien $u_1 \dots u_m \in K^n$ Zeilen von A
und $v_1 \dots v_n \in K^m$ Spalten von A .

z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ Zeilen } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ Spalten } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Der Zeilenrang oder ZR von A ist
 $\text{Zeilenrang}(A) = \text{ZR}(A) = \dim \langle u_1 \dots u_m \rangle \leq K^n$

Der Spaltenrang oder SR von A ist
 $\text{Spaltenrang}(A) = \text{SR}(A) = \dim \langle v_1 \dots v_n \rangle \leq K^m$

"Der Zeilenrang ist die Anzahl lin. unab. Zeilenvektoren in A . Der Spaltenrang die Anzahl lin. unab. Spaltenvektoren in A "

Zeilenrang = Spaltenrang (Beweis in RZSF) 19.10.24

Sei $m, n \geq 1$ $A \in M_{m \times n}(K)$

Dann gilt

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$$

- Beweis dass $\text{ZR}(A) = \text{SR}(A)$, wenn A in RZSF.

A sei in RZSF und habe r führende Einser. Dann gibt es offensichtlich r linear unabhängige Spaltenvektoren.

$$\Rightarrow \text{SR}(A) = r$$

Weiter gibt es genau r Zeilen die keine Nullzeilen sind. Wegen der Eigenschaft, dass jede Zeile die über einer gewissen Referenzzeile Einträge weiter links hat, wissen wir durch Induktion auch, dass diese nicht-Nullzeilen alle linear unabhängig sind. $\Rightarrow \text{ZR}(A) = r$

$$\text{ZR}(A) = \text{SR}(A)$$

Lineare Abbildungen & Endomorphismen 23.10.24

Eine Funktion $T: V \rightarrow W$ ist eine lineare Abbildung, wenn

$$(1) T(\alpha v) = \alpha T(v) \quad \forall \alpha \in K \quad \forall v \in V$$

$$(2) T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V$$

Eine lineare Abbildung $T: V \rightarrow V$ ist ein Endomorphismus.

- Wir schreiben auch $T(v) = Tv$.

- $T: V \rightarrow W$ ist genau dann linear, wenn

$$T(\alpha v + \beta u) = \alpha Tv + \beta Tu \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \forall v, u \in V$$

- Wenn $T: V \rightarrow W$ linear ist gilt

$$(1) T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 Tv_1 + \dots + \alpha_n Tv_n$$

$$(2) T(0_V) = 0_W$$

- Wenn $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ist T durch $Tv_1, \dots, Tv_n$ vollständig bestimmt.

- Sei V endl. dim. mit $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, $w_1, \dots, w_n \in W$
Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $T: V \rightarrow W$ s.d. $T(v_i) = w_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$

Def: Kern und Bild 23.10.24

Seien V, W K -VR. $T: V \rightarrow W$ ist linear.

(1) Kern von T ist „Menge aller v die auf 0_W bilden“

$$\ker(T) = \{v \in V \mid Tv = 0_W\}$$

(2) Bild von T ist „Menge aller w auf die abgebildet wird“

$$\operatorname{im}(T) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ s.d. } Tv = w\}$$

Außerdem gilt

- $\ker(T) \leq V$
- $\operatorname{im}(T) \leq W$

Proof: $T: V \rightarrow W$ mit V endl. dim VR. 23.10.24
Dann sind $\ker(T)$ & $\operatorname{im}(T)$ endl. dim

- $\ker(T)$ ist endl. dim, da $\ker(T) \leq V$ und V ist endl. dim
- Es sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V .
Dann ist $T(v_1), \dots, T(v_n)$ ein erzeugendensystem von T und somit endlich. dimensional. $\square$

Ray eine lineare Abbildung und Dimension 28.10.24

- $T: V \rightarrow W$ sei eine lineare Abbildung.
Der Ray von T ist gegeben durch
$$\operatorname{rk}(T) := \dim(\operatorname{im}(T))$$
- Weiter sei V, W endl. dim $V \mathbb{R}/\mathbb{K}$ dann gilt
$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{K}}(V) &= \dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) + \operatorname{rk}(T) \\ &= \dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{im}(T))\end{aligned}$$

Beweis durch erstellen einer Basis von V , wobei wir die Basis von $\ker(T)$ zu einer von V erweitern und zeigen, dass die erweiterungs-Vektoren dann ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im}(T)$. Zeige nun dass sie auch lin. unabh sind.

Aussagen über Surjektivität, Injektivität und Bijektivität von linearen Abbildungen 28.10.24

$$\ker(T) = \{0_V\} \Leftrightarrow T \text{ ist injektiv}$$

$$\operatorname{im}(T) = W \Leftrightarrow T \text{ ist surjektiv}$$

Da keine zwei Werte doppelt abgebildet werden können und $0_V \in \ker(T)$ immer gilt. " $\Rightarrow$ " $T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = 0_W$

$$T(u - v) = 0_W \text{ gilt nur für } u - v = 0_V$$

$$\Rightarrow u = v$$

□

T sei lineare Abb. $T: V \rightarrow W$. Dann gilt

(1) $\dim(W) < \dim(V) \Rightarrow T$ ist nicht injektiv

(2) $\dim(W) < \dim(V) \Rightarrow T$ ist nicht surjektiv

(3) Wenn $\dim(W) = \dim(V)$ sind folgende äquivalent

$$T \text{ bijektiv} \Leftrightarrow T \text{ injektiv} \Leftrightarrow T \text{ surjektiv}$$

Isomorphismus & Bijektive lineare Abbildung 28.10.24

Die lineare Abbildung $T: V \rightarrow W$ ist ein Isomorphismus, wenn es $S: W \rightarrow V$ gibt, s.d.:

$$S \circ T = \text{id}_V \quad \text{und} \quad T \circ S = \text{id}_W$$

In diesem Fall schreiben wir $S = T^{-1}$ und nennen T^{-1} die Inverse.

Wir schreiben $V \cong W$.

- Jede lineare Bijektion $T: V \rightarrow W$ ist ein Isomorphismus (bewiesen in Vorlesung!)

lin. Abb T ist iso $\Leftrightarrow [T]_B^B$ invertierbar 3.11.24

V sei ein endlichdim VR mit
Basis $B = (v_1 \dots v_n)$

$T: V \rightarrow V$ sei linear.

Dann gilt

T ist Isomorphismus $\Leftrightarrow [T]_B^B$ invertierbar

Proof:

" $\Leftarrow$ " $A = [T]_B^B$ nimm an es gibt A^{-1}

$$\text{z.z. } L_{A^{-1}} \circ T = T \circ L_{A^{-1}} = \text{id}_V$$

$$[L_{A^{-1}} \circ T]_B^B = [L_{A^{-1}}]_B^B [T]_B^B = A^{-1} A = \mathbb{1}_n = [\text{id}]_B^B$$

" $\Rightarrow$ " $L_{A^{-1}} \circ T = \text{id}_V$

$$[L_{A^{-1}} \circ T]_B^B = [L_{A^{-1}}]_B^B [T]_B^B = A^{-1} A = \text{id}_V$$

d.h. A ist invertierbar mit Inverse A^{-1} $\square$

Basiswechselmatrix

3.11.24

V sei endl. dim $U \subseteq K$ $B = (v_1 \dots v_n), B' = (v'_1 \dots v'_n)$
sind Basen.

$$A = [id]_{B'}^B \in M_{n \times n}(K)$$

$$\text{mit } A = (a_{ij}) \text{ und } v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v'_i$$

A beschreibt die Vektoren von B
ausgedrückt als Linearkombination von
der Basis B' . A heißt Basiswechselmatrix
von B nach B' .

Anschaulich gesagt wird ein Vektor
 v der in Basis von B dargestellt wird
mit der Matrix

$[id]_{B'}^B v$ in denselben Vektor ausgedrückt
in der Basis B' übersetzt. Um wieder
zurück zu übersetzen, kann man die
Inverse linksmultiplizieren $[id]_{B'}^B = [id]_{B'}^B$

Was ist $[T]_{C'}^{B'}$ im Bezug zu $[T]_C^B$ 3.11.24

$$[T]_{C'}^{B'} = [id]_{C'}^C [T]_C^B [id]_B^{B'}, \text{ wobei } [id]_{C'}^C, [id]_B^{B'}$$

Basiswechselmatrizen sind.

folgt direkt aus

$$[S \circ T]_C^A = [S]_C^B [T]_B^A$$

Äquivalente und Ähnliche Matrizen

3.11.24

- $A, B \in M_{m \times n}$ sind äquivalent, wenn
 $B = PAQ$ mit $P \in M_{m \times m}(\mathbb{K})$ und
 $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ und P und Q invertierbar sind.
- $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ sind ähnlich, wenn
 $B = PAP^{-1}$ mit $P \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$
Dem Ausdruck PAP^{-1} nennt man
Konjugation von A durch P .

Ähnlichkeit und Äquivalenz (Matrizen) sind Äquivalenzrelationen (Beweis)

7.11.24

Beweis für Ähnlichkeit

• Reflexivität: $A \sim A \Rightarrow A = I A I^{-1} = A$

• Symmetrie: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$$A \sim B \Leftrightarrow A = P^{-1} B P \Leftrightarrow P A P^{-1} = B \Leftrightarrow B \sim A$$

• Transitivität: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$$B = P^{-1} A P, C = Q^{-1} B Q$$

$$\Rightarrow C = Q^{-1} P^{-1} A P Q = (PQ)^{-1} A P Q$$

$$\Leftrightarrow A \sim C$$

□

$$\mathbb{Z}R(A) = SR(A)$$

fertig machen

$\text{Hom}(V, W)$

21.11.27

Es seien V, W K -VR.

Schreibe $\text{Hom}_K(V, W)$ für die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W .

$\text{Hom}_K(V, W)$ hat dann die Struktur eines K -VR mit der Operationen.

(1) Es seien $T_1, T_2 \in \text{Hom}_K(V, W)$ Dann ist

$$(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \quad \forall v \in V$$

(2) Es seien $T \in \text{Hom}_K(V, W)$ $\alpha \in K$. Dann ist

$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$$

Isomorphismus Lin. Abb $\rightarrow$ Matrizen (Dimergia)

21.11.24

Seien V, W endl. dim K -VR und es sei

$B = (v_1 \dots v_n)$ ist Basis von V

$C = (w_1 \dots w_m)$ ist Basis von W

Dann ist die Abbildung

$$\Psi_C^B : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow M_{m \times n}(K)$$

$$T \mapsto [T]_C^B$$

linear und ein Isomorphismus.

Dieses Resultat ist Grundlegend wichtig. Es besagt, dass jede lineare Abbildung eindeutig als Matrix dargestellt werden kann und umgekehrt.

Dann ist auch klar, dass

$$\dim_K(\text{Hom}_K(V, W)) = \dim_K(V) \dim(W)$$

Dualer Vektorraum, duale Basis 21.11.24

V sei ein K -VR. Der Dualraum von V ist der VR

$$V^* = \text{Hom}_K(V, K)$$

Die Elemente in V^* heißen Linearformen und haben die Form $T: V \rightarrow K \quad \forall T \in V^*$

Wenn V endl. dim VR mit der Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ ist, so ist v_i^* für $1 \leq i \leq n$ Basis von V^* . Dabei ist v_i^* folgendermaßen definiert

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Explizit bildet v_i^* $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ auf α_i ab.

Die Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ nennen wir duale Basis von V .

Relation dualer Basiswechselmatrix, 27.11.24 zur Basiswechselmatrix

Sei V endl. dim K -VR mit den Basen
 $B = (v_1 \dots v_n)$ und $C = (w_1 \dots w_n)$

Dann gilt

$$[id]_{B^*}^{C^*} = ([id]_C^B)^T$$

Außerdem gilt

$$[id]_{C^*}^{B^*} = \left([id]_C^B \right)^{-1^T}$$

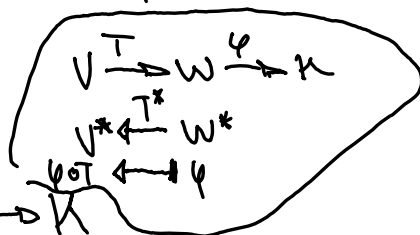
Duale Abbildungen

21.11.24

Die Abbildung $T: V \rightarrow W$ sei in $\text{Hom}_K(V, W)$
die duale Abbildung $T^*: W^* \rightarrow V^*$
ist gegeben durch
 $\varphi \mapsto \varphi \circ T$

$$T^*(\varphi)(v) = \varphi(T(v))$$

wobei $\varphi \in W^*$, $\varphi: W \rightarrow K$



$T^*(\varphi)$ ist ein Element von V^* ,
weil $T^*(\varphi)$ linear ist.

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$$

$\searrow \quad \nearrow$
 $S \circ T$

$$U^* \xleftarrow{T^*} V^* \xleftarrow{S^*} W^*$$

$\nwarrow \quad \nearrow$
 $T^* \circ S^* = (S \circ T)^*$

Seien V, W endl. d. m. K mit Basen

$B = (v_1, \dots, v_n)$ von V und $C = (w_1, \dots, w_m)$ von W

Sei $T: V \rightarrow W$ linear, dann gilt

$$[T^*]_{B^*}^{C^*} = ([T]_C^B)^T$$

Annulatoren - Det und Dim

27.11.24

Sei V VR, $U \leq V$ der Annulator von U
ist die Menge aller $\ell \in V^*$ s.d.

$U \subseteq \ker(\ell)$ d.h. $\ell(u) = 0 \quad \forall u \in U$ schreibe

$$U^\circ = \{ \ell \in V^* \mid \ell(u) = 0 \quad \forall u \in U \}$$

- U° ist UR von V^* $U^\circ \leq V^*$
- $\dim(U) + \dim(U^\circ) = \dim(V)$
- Seien U, W n -VR, $T: V \rightarrow W$ linear

Dann gilt:

$$1) (\operatorname{im}(T))^\circ = \ker(T^*)$$

$$2) (\ker(T))^\circ = \operatorname{im}(T^*)$$

$\begin{array}{ccc} \ker(T) \leq V & \xrightarrow{T} & W \geq \operatorname{im}(T) \\ \downarrow (\cdot)^\circ & & \downarrow (\cdot)^\circ \\ \operatorname{im}(T^*) \leq V^* & \xleftarrow{T^*} & W^* \geq \ker(T^*) \end{array}$

• Außerdem gilt

$$\dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(\operatorname{im}(T^*))$$

- T ist injektiv $\Leftrightarrow T^*$ ist surjektiv
- T ist surjektiv $\Leftrightarrow T^*$ ist injektiv

Bidualraum

28.11.24

Der Bidualraum von V V^* K (endl. dim)
ist gegeben als

$$V^{**} = (V^*)^*$$

- Es gilt natürlich
 $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V)$
- $\tau \in V^{**}$ hat die Form
 $\tau: V^* \rightarrow K$ also bildet τ linearform
auf K ab.

Dabei ist τ definiert als
 $(\tau(v))(l) = l(v)$ für $l \in V^*$ und $v \in V$

- $\tau(v)$ ist linear und somit Element von V^{**}
- $B = (v_1, \dots, v_n), B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*), B^{**} = (v_1^{**}, \dots, v_n^{**})$

Dann gilt $\tau(v_i) = v_i^{**}$

$$\text{da } (\tau(v_i))(v_j^*) = v_j^*(v_i) = \delta_{ij}$$

$$\text{und } v_i^{**}(v_j^*) = \delta_{ij} \text{ per definition.}$$

- B, C seien Basen von V, W

$$[T^{**}]_{C^{**}}^{B^{**}} = ([T^*]_{B^*}^{C^*})^T = ([T]_C^B)^{TT} = [T]_C^B$$

Reflexivität: Isomorphismus $\phi: V \rightarrow V^{**}$ 28.11.24

Sei V ein endl. dim VR. Dann definiert die Abbildung

$$\phi: V \rightarrow V^{**} \quad v \mapsto \phi(v)$$

ein Isomorphismus zwischen V und seinem Bidualraum. Man sagt

V ist reflexiv.

Ein Raum ist reflexiv wenn eine Abbildung in dessen Bidualraum ein Isomorphismus ist. Jeder endl. dim VR ist reflexiv.

Quotientenraum Def

28.11.24

Der Quotientenraum von V durch U ist die Menge aller Nebenklassen von U und geschrieben als V/U . V/U ist K -VR mit

- $[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]$ und
- $\alpha[v] = [\alpha v]$

Dabei ist $[v]$ die von v erzeugte Nebenklasse von U . Es gilt

$$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow [v_1] = [v_2] \quad \text{bzw.} \quad v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow (v_1 - v_2) \in U$$

d.h. v_1 und v_2 in derselben Äquivalenzklasse, wenn sie derselben Nebenklasse erzeugen.

- Sei $q_U: V \rightarrow V/U$ $v \mapsto [v]$ dann ist q_U linear und es gilt $\ker(q_U) = U$, $\text{im}(q_U) = V/U$

- Es gilt $\dim V/U = \dim V - \dim U$

- Sei W ein Komplement von U in V .

Dann definiert $q_U|_W: W \rightarrow V/U$
 $w \mapsto [w]$

einen Isomorphismus. da $\ker(q_U) = \{0_V\}$
und $\text{im}(q_U) = V/U$

erster Isomorphiesatz

1.12.24

Sei $T: V \rightarrow W$ linear. Definieren

$\bar{T}: V/\ker(T) \rightarrow \operatorname{im}(T)$ als

$$\bar{T}([v]) = T(v)$$

Dann gilt

- (1) $\bar{T}$ ist wohldefiniert
- (2) $\bar{T}$ ist kanonischer Isomorphismus
- (3) $\bar{T} \circ \operatorname{quer}(T) = T$

Permutationen & Transpositionen

4.12.24

Sei $n \geq 1$. Eine Permutation von $X = \{1, \dots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung

$$\sigma: X \rightarrow X$$

Wir schreiben $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ eine Transposition ist eine Permutation, die genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen auf sich selbst abbildet.
◻ id ist keine Transposition.

Die Menge aller Permutationen sind eine Gruppe unter der Verknüpfung von Funktionen.
Also eine Symmetrische Gruppe S_n mit $n!$ Elementen.

- Sei $\tau \in S_n$ eine Transposition.

Dann gilt $\tau^2 = \text{id}$

- Jede Permutation ist die Verknüpfung von endlich vielen Transpositionen.
◻ nicht eindeutig, da id unterschiedlich dargestellt werden kann.

Gerade/ungerade Zerlegungen in Transpositionen 4.12.24

Es sei $\sigma \in S_n$ oder $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_n = \tau'_1 \circ \dots \circ \tau'_l$
Zerlegungen in Transpositionen. Dann gilt
 $2 \mid (l-k)$. Dieses Ergebnis ist nicht
trivial.

Weiter definieren wir $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_n$
als gerade, falls $2 \nmid k$ und als
ungerade, falls $2 \mid k$.

Außerdem gilt

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } \sigma \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\text{d.h. } \text{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

und es gilt

$$\text{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1) \text{sgn}(\sigma_2)$$

Die Menge aller geraden Permutationen
in S_n ist eine Gruppe A_n (alternierend)

n-Linearität

4.12.24

Sei $f: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$ eine Funktion.

f ist n -linear (in Spaltenvektoren), wenn
 $\forall 1 \leq i \leq n$ gilt $\forall \lambda \in K$ und $u \in K^n$

$$f(v_1 \dots v_i + u \dots v_n) = f(v_1 \dots v_i \dots v_n) + f(v_1 \dots u \dots v_n)$$

$$f(v_1 \dots \lambda v_i \dots v_n) = \lambda f(v_1 \dots v_i \dots v_n)$$

z.B.

• $0: M_{n \times n}(K) \rightarrow 0$

• $A = (a_{ij}) \quad f: A \mapsto a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$

Wenn $f, g: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$ n -linear sind, so
ist auch $\alpha f + \beta g$ mit $\alpha, \beta \in K$ n -linear.

Alternierende Funktionen

Eine Funktion $f: \mu_{n \times n}(K) \rightarrow K$ ist alternierend, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind: Wenn $v_i = v_{i+1}$ für ein $1 \leq i \leq n$ dann:

$$f(v_1, \dots, v_n) = 0$$

Eigenschaften von n -linear und alternierender Funktionen

8.12.24

Sei $f: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$ n -linear und alternierend.

Dann gilt:

$$(1) f(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_n)$$

Beweis durch $f(v_1, \dots, v_i + v_{i+1}, v_i + v_{i+1}, \dots, v_n) = 0$.

(2) Wenn $v_i = v_j$ für $i \neq j$, dann gilt

$$f(v_1, \dots, v_n) = 0$$

Beweis (1) & vertauschen bis nebeneinander

$$(3) f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

Beweis genau wie bei (1) und mit Hilfe von (2).

Determinantenfunktion

8.12.24

Eine Funktion $D: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$ ist eine Determinantenfunktion, wenn gilt:

- (1) D ist alternierend
- (2) D ist n -linear
- (3) $D(1_n) = 1$

Wir definieren $A_{ij} \in M_{n-1 \times n-1}(K)$ als die $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ Matrix, bei der wir die i -te Zeile und j -te Spalte herausstreichen

Wir haben gezeigt, dass

• Sei $n \geq 1$. Dann gibt es eine Det-Fkt $D: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$

• Sei $n \geq 1$. Dann existiere genau eine Determinantenfunktion $D: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$

Explizit ist $D(A)$ mit $A = (a_{ij})$ $1 \leq i, j \leq n$ gegeben durch

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Somme aus $n!$ Summanden mit jeweils n Faktoren. $\rightarrow$ Reduzierintensiv.

Beweis: $\text{sgn}(\sigma)$ ist eindeutig 8.12.24

Sei $\sigma \in S_n$ und

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k = \tau'_1 \circ \dots \circ \tau'_m$$

Zwei zerlegungen in Transpositionen.

Dann gilt $2|(k-m)$

Beweis: Sei $D: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$ Det-Fkt.

$e_1, \dots, e_n$ Standardbasis von K^n

σ kann durch k Transpositionen geschrieben werden. Wir können also mit k vertauschen von

$$1_{\mathbb{N}} \text{ zu } (e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)} \dots e_{\sigma(n)})$$

$$\text{Das lässt } D(e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(n)}) = (-1)^k$$

Da aber auch m vertauschen zur gleichen Matrix führen muss gelten

$$(-1)^k = (-1)^m \Rightarrow 2|(k-m)$$

Einige Eigenschaften der Determinante 11.12.24

Für alle folgen sei $D: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$
 n -linear und alternierend.

- Es gilt $D(A) = \det(A) D(1|1_n)$
- Es gilt $\det(A) = \det(A^T)$
- Die Determinantenfunktion ist auch n -linear und alternierend bezüglich Zeilenvektoren.
- B lässt sich von A und elementare Anwendung der EZUs konstruieren. Es gelte $A = XB$
 - (1) Wenn $X = P(r, s)$ dann $\det(B) = -\det(A)$
 - (2) Wenn $X = M(r, \lambda)$, $\lambda \in K$ dann $\det(B) = \lambda \det(A)$
 - (3) Wenn $X = S(r, s, \lambda)$, $\lambda \in K$ dann $\det(B) = \det(A)$
- Wenn $M \in M_{n \times n}(K)$ die Form $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{s \times r} & C \end{pmatrix}$
und $A \in M_{r \times r}(K)$, $B \in M_{r \times s}(K)$ und $C \in M_{s \times s}(K)$, dann gilt $\det(M) = \det(A) \det(C)$.
- Wenn $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.
- Sei $A, B \in M_{n \times n}(K)$, dann gilt $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

Weitere Eigenschaften der Determinanten 10.7.24

- Wenn $A \in GL_n(K)$ (invertierbare Matrix), dann ist $\det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- Ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante
- Wenn K ein unendlicher Körper ist, gibt es unendlich viele Äquivalenzklassen ähnlicher Matrizen.
- A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

Kofaktor-matrix und adjunkte Matrix 12.24

Für $1 \leq i, j \leq n$, schreibe $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

Kofaktormatrix von A ist die Matrix $C = (C_{ij})$

Adjunkte Matrix von A ist $\text{adj}(A) = C^T$

- Wenn $A \in M_{n \times n}(K)$. Dann gilt

$$A \text{adj}(A) = \text{adj}(A)A = \det(A) \mathbb{1}_n$$

- Wenn $\det(A) \neq 0$ gilt

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \text{adj}(A)$$

Determinante eines Endomorphismus 15.12.24

Es sei $T: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Sei B Basis von V . Definiere

$$\det(T) = \det([T]_B^B)$$

• Wenn C eine andere Basis ist, gilt

$$\det(T) = \det([T]_C^C) = \det([T]_B^B)$$

• Der Wert $\det([T]_C^B)$ ist nicht wohldefiniert.

• Wenn V endl. dim gilt

$$(1) \det(S \circ T) = \det(S) \det(T)$$

$$(2) T \text{ Isomorphismus} \Leftrightarrow \det(T) \neq 0 \Rightarrow \det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$$

$$(3) \det(0) = 0 \text{ und } \det(\text{id}_V) = 1$$