

Definition Prädikat 19.9.24

Ein Prädikat ist eine Aussage A die von einem oder mehreren Argumenten abhängt.

z.B. $A(x, n): x^n = \sqrt{2}$ mit $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

↳ Die Aussage ist nur unter bestimmten x, n gültig, weshalb sie ein Prädikat ist.

Syntax: 'es folgt' / Negation / Äquivalenz / 'für Alle' /
es gibt ein / es gibt genau ein / es gibt kein /
logisches und / logisches oder 19.09.24

$\Rightarrow$	es folgt	$A \Rightarrow B$
$\neg$	Negation	$\neg A$
$\Leftrightarrow$	Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$
$\forall$	für alle	$\forall x \in \mathbb{R}: x = x^2 \quad \&$
$\exists$	es gibt ein	$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = 1$
$\exists!$	es gibt genau ein	$\exists! x \geq 0: x^2 = 1$
$\nexists$	es gibt kein	$\nexists x \in \{1, 2, 3\}: x = 0$
$\wedge$	logisches und	$A \wedge B$
$\vee$	logisches oder	$A \vee B$
$:=$	definiert	$X \subset Y := \forall x \in X: x \in X \Rightarrow x \in Y$

Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

28.9.24

- $\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{N}_0$ Menge der natürlichen Zahlen inkl. Null $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$
- $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$
- $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$
- $\mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0]$
- $\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen

Die wichtigsten Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle
 $I, I \subset \mathbb{R}$

- offenes Intervall

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Def: $X \subset \mathbb{R}$. X nennt man offen falls
für jedes Element $x \in X$ gilt

$$\exists \varepsilon > 0: \forall y \in \mathbb{R} (|x - y| < \varepsilon \Rightarrow y \in X)$$

- abgeschlossenes Intervall

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Def: $X \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen falls X^c offen ist.

- halboffene Intervalle (nach unten offen)

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

beziehungsweise (nach oben offen)

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Def: obere / untere Schranke von $X \subseteq \mathbb{R}$ 30.9.24
 $\text{Sup}(X), \text{Inf}(X), \text{maximum}, \text{minimum}$

Eine obere Schranke einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Element $y \in \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\forall x \in X: x \leq y$$

Das Supremum von X ist die kleinste obere Schranke und hat folgende Eigenschaften:

$$(\forall x \in X: s \geq x) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X: s - \varepsilon < x)$$

Die untere Schranke und die grösste untere Schranke - Infimum sind analog dazu definiert

$$\forall x \in X: x \geq y$$

bzw.

$$(\forall x \in X: l \leq x) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X: l + \varepsilon > x)$$

Das maximum einer Menge ist das grösste Element darin. Das minimum das kleinste.

$$\max(X) = \{x_0 \mid \forall x \in X: x \leq x_0\}$$

$$\min(X) = \{x_0 \mid \forall x \in X: x \geq x_0\}$$

Fundamentalsatz der Algebra

30.9.24

Jedes Polynom

$$p(z) = \sum_{h=0}^n a_h z^h \quad a_h \in \mathbb{C}$$

kann in Linearfaktoren faktorisiert werden und geschrieben werden als

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Die Zahlen z_h sind also gerade die Nullstellen des Polynoms.

Ein Polynom mit Grad n hat also genau n Nullstellen (mit Vielfachheit) $\rightarrow$ zu n Linearfaktoren sind gleich

Konvergenz und Divergenz einer Folge 30.9.24

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt konvergent, falls ein $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N : |a_n - L| < \varepsilon$$

L wird dann Grenzwert genannt und man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Falls kein L mit den obigen Eigenschaften existiert, nennt man die Folge divergent.

! Eine Folge ist entweder konvergent oder divergent.

Spezialfälle divergente Folgen:

- $\forall M > 0 \exists N > 0 \forall n > N : a_n > M \rightsquigarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{"Die Folge divergiert gegen unendlich"}$$

- $\forall M > 0 \exists N > 0 \forall n > N : a_n < -M \rightsquigarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{"Die Folge divergiert gegen $-\infty$ "}$$

Def: Teilfolge

30.9.24

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Eine Teilfolge ist eine Folge der Form

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$$

Wobei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge nicht-negativer ganzer Zahlen ist und dabei

$n_{k+1} > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

↳ Auswahl von Folgengliedern gemäss (a_{n_k})

! Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ist auch

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$. Eine Folge und all deren

Teilfolge haben denselben Grenzwert L .

Def: Häufungspunkt

30.9.24

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$

Ein Häufungspunkt $A \in \mathbb{R}$ erfüllt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}_0 \quad \exists n \geq N : |a_n - A| < \varepsilon$$

Bem. Häufungspunkt (im Intervall $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$) befinden sich unendlich viele Punkte/Folgeglieder aus a_n

Beachte: Wenn L ein Grenzwert ist, ist L auch ein Häufungspunkt

Beweis: Eine konvergente Folge besitzt genau 3.10.29
einen eindeutigen Grenzwert.

Wir nehmen an, es gibt zwei Grenzwerte
 A und B der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Dies bedeutet, es existiert ein $N_A \in \mathbb{N}$, so
dass

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_A$$

andererseits aber auch $N_B \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_B$$

Nun setzen wir $N := \max \{N_A, N_B\}$

Damit gilt dann

$$|A - B| \leq |A - a_n| + |a_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Da diese Ungleichungen für alle $\varepsilon > 0$ gelten,
muss schlussendlich gelten

$$|A - B| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow A = B$$



Sandwich Theorem

Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zwei konvergente Folgen mit demselben Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

Sowie die dritte Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit der Eigenschaft, dass ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq N_0$$

Dann ist die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auch konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

Bsp. $g_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} \quad (n \geq 1)$

$$(3^n)^{\frac{1}{n}} \leq (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} \leq (3^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow (3^n)^{\frac{1}{n}} = 3 \quad \text{und} \quad (3^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot 3$$

mit $\lim_{n \rightarrow \infty}$ gilt

$$3 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} \cdot 3 = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$$

Begriffe: beschränkt, monoton fallend / wachsend, 7.10.24
streng monoton fallend / wachsend

Eine Folge ist nach oben beschränkt, wenn

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \leq x$$

bzw. nach unten beschränkt, wenn

$$\exists y \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \geq y$$

bzw. nach oben und unten beschränkt (kurz beschr.)

$$\exists x, y \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}_0 : y \leq a_n \leq x$$

Eine Folge ist monoton fallend, wenn jedes
folgende Folgenglied kleiner-gleich dem vorherigen
ist:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : m > n \Rightarrow a_m \leq a_n$$

bzw. monoton wachsend

$$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$$

Eine Folge ist streng monoton fallend, wenn:
[strikte Umschreibung]

$$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : m > n \Rightarrow a_m < a_n$$

bzw. streng monoton wachsend:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : m > n \Rightarrow a_m > a_n$$

Beweis: jede konvergente Folge ist beschränkt. 7.10.24

Da die Folge konvergiert gibt es ein Index N_1 mit der Eigenschaft:

$$\forall n \geq N_1: |a_n - L| \leq 1 \quad \text{wenn} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Damit haben wir

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq 1 + |L| \quad \forall n \geq N_1$$

Wir setzen nun $M := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N_1-1}|, 1 + |L|\}$

Da M nur endlich viele Elemente enthält gilt: $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. Die betrachtete Folge a_n ist beschränkt. $\square$

i Die 1 hier ist willkürlich gewählt.

Beweis: Dreiecksungleichung

7.10.24

Dreiecksungleichung: $\forall z, w \in \mathbb{C}$

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

Beweis:

Lemma: Für beliebige komplexe Zahlen

$$z = x_1 + iy_1, w = x_2 + iy_2 \text{ gilt:}$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq |z| \cdot |w| \quad (*) \text{ Cauchy-Schwarz-Ungleichung}$$

Beweis zu Lemma:

$$\underbrace{|z|^2 \cdot |w|^2}_{(x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2)} - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 = \dots \geq 0$$

$$\Rightarrow (*) \text{ lässt sich einfach folgern}$$

Beweis der Dreiecksungleichung:

$$|z+w|^2 = \dots$$



$\leadsto$ noch nicht schreiben

Beweis: Eine monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert 7.10.24
gerau dann, wenn sie beschränkt ist

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konvergente monotone Folge.

Wir können beweisen, dass sie dann auch beschränkt ist ($\Rightarrow$ siehe KK: konvergente Folge ist besch.).

Wir gehen von einer $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus, die monoton wachsend und beschränkt ist (Fall eine fallende Folge ist analog zu behandeln).

Da die Folge also beschränkt ist gibt es ein $M \in \mathbb{R}$,

so dass $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Dann kann ich auch die folgende Menge betrachten:

$X := \{a_n | n \in \mathbb{N}_0\} \Rightarrow$ Menge aller Folgeglieder

Die Menge X ist nach oben beschränkt.

Daraus folgt nun, dass $S := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ existiert.

Wir wollen als nächstes zeigen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen S konvergiert.

Es gilt:

i) $a_n \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}_0$ mit $a_N > S - \varepsilon$

Dann haben wir für $n \geq N$:

$$S - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq S < S + \varepsilon$$

bzw.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq N : |a_n - S| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S$$

□

Limes Superior / Limes Inferior

9.10.24

Wir beginnen mit der beschränkten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Weiter setzen wir $s_n := \sup \{a_k \mid k \geq n\}$

und $i_n := \inf \{a_k \mid k \geq n\}$

Dabei sind a_n Teilfolgen.

Eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei beschränkt und monoton fallend. $\Rightarrow$ Sie konvergiert also auch.

Analog dazu ist $(i_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt und monoton wachsend $\Rightarrow$ konvergiert auch

Dann gilt

"Limes Superior" $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sup \{a_k \mid k \geq n\}}_{s_n}$

"Limes Inferior" $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\inf \{a_k \mid k \geq n\}}_{i_n}$

$\hookrightarrow$ Die Grösse des Limes Superior kann als grösster Häufungspunkt der Folge a_n verstanden werden.
Limes Inferior analog dazu als kleinster Häufungspunkt.

Def: Cauchy-Folge

10.10.24

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heisst
Cauchy-Folge, falls für jedes $\varepsilon > 0$
ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$\forall m, n \geq N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Anschaulich gesagt, müssen zwei Folgenglieder,
mit einem grösseren Index als N beliebig
nahe aneinander sein.

⚠ Achtung: Es gilt nicht immer $n = m + 1$,
die Folgenglieder können auch andere
Indizes dazwischen haben.

Beweis: Jede Cauchy-Folge ist beschränkt 10.10.24

Ab dem N -ten Folgenglied können a_n und a_m maximal die Differenz ε haben. Mit einem frei gewählten ε , z.B. $\varepsilon=1$ kann also ein jedes Folgenglied nicht weiter von a_N entfernt sein als $\varepsilon=1$. Da N endlich ist, und alle folgenden Folgenglieder im ε -Ball mit Radius 1 sein müssen, ist die Folge beschränkt $\square$

Beweis: Eine Folge reeller Zahlen 10.10.24
konvergiert genau dann, wenn
sie eine cauchy-Folge ist

" $\Rightarrow$ " Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit
Grenzwert L . Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein
Index N mit

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - L + L - a_m| \\ &\leq |a_n - L| + |L - a_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall m, n \geq N \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$
eine cauchy-Folge ist.

" $\Leftarrow$ " Umgekehrt gehen wir von einer cauchy-Folge
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus.

Dann ist diese Folge insbesondere beschränkt.
Daraus folgt wiederum, dass eine konvergente
Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ existiert mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$

Def: Reihe

14.10.24

Ein formaler Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

nennt man Reihe und die a_i
heissen Summanden / Glieder oder Elemente
der Reihe.

Konvergenz von Reihen

14.10.24

Falls die Folge der Teilsummen (Partialsummen)

$$S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

↖ FOLGENGRENZ

mit $n \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert $L < \infty$ konvergiert, so sagen wir, dass die Reihe konvergiert und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_0 + a_1 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = L$$

↳ L nennt man auch Wert der Reihe.

- Falls eine Reihe konvergiert, muss auch gelten, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

↳ Summand ist bei genug grossen n beliebig klein.

Man nennt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dann auch Nullfolge.

- Eine Reihe die nicht konvergiert divergiert.

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert

19.10.24

~ noch ein Beweis verloren

Vergleichskriterium (Majoran/Minoran)

17.10.24

Wir betrachten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

mit nicht-negativen Gliedern und für eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$c_n \leq b_n \leq a_n \quad \forall n \geq N$$

Dann gilt

- falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv., konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$
(Majorantenkriterium)
- falls $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergiert, divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$
(Minorantenkriterium)

Def: absolut / bedingt konvergent 17.10.24

- Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nennt man absolut konvergent, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert
- Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nennt man bedingt konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, jedoch nicht absolut konvergiert.

Riemannscher Umordnungssatz

Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen 17.10.24

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente

Reihe reeller Summanden und es sei

$\varphi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Bijektion.

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ absolut und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Cauchy - Verdichtungsatz

17.10.24

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer Elemente.

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert}$$

" $\Rightarrow$ ": Da die Reihe $\sum_{2^n} a_n$ monoton fallend ist gilt $\sum_{2^n} a_n \geq \sum_{2^n} 2^n a_{2^n}$.

" $\Leftarrow$ ": Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{2^n} 2^n a_{2^n} = 0$ konvergiert die Folge. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \neq 0$ muss a_{2^n} mit $n \rightarrow \infty$ Null sein, weshalb auch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ und somit auch die linke Seite konvergiert.

Leibniz Kriterium

17.10.24

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei monoton fallende Folge
nicht-negativer Zahlen, welche gegen Null konvergiert.

Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{und es gilt}$$

$$\sum_{n=0}^{2m+1} (-1)^n a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \leq \sum_{n=0}^{2m} (-1)^n a_n \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

Cauchy Kriterium

17.10.24

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass für $n, m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{h=m+1}^n a_h \right| \leq \varepsilon \leadsto \text{siehe } \underline{\text{Cauchy-Folge}}$$

Wurzel-Kriterium

21.10.24

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. und es sei

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Dann gilt:

$\rho < 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

$\rho > 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

$\rho = 1$: keine mögliche Aussage über Konvergenzverhalten

Quotienten - Kriterium

23.10.24

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ und es sei

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Dann gilt

- $\rho < 1$: dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut
- $\rho > 1$: dann divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
- $\rho = 1$: keine möglichen Aussagen über das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Produkt zweier abs. konv. Reihen § 23.10.29

Cauchy-Produkt

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen.

- Es sei $\varphi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine Bijektion.
Dann schreiben wir

$$\varphi(n) = (\varphi_1(n), \varphi_2(n)) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Und es gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi_1(n)} b_{\varphi_2(n)}$$

konvergiert absolut.

- Ausserdem ist das Cauchy-Produkt folgendermassen definiert:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut.

Def: Potenzreihe & Konvergenzradius & Konvergenzintervall

24.10.25

Die Reihe der Form

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

heißt Potenzreihe um den Entwicklungspunkt a mit Koeffizienten c_n und Argument x .

Falls für ein festes x die Partialsumme

$$S_n(x) = \sum_{n=0}^n c_n(x-a)^n \text{ konvergiert, so sagen}$$

wir die Potenzreihe konvergiert für das x .

Es gilt

•) Jede Potenzreihe besitzt einen Konvergenzradius R ,
so dass gilt

$$\bullet |x-a| < R \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \text{ konv.}$$

$$\bullet |x-a| > R \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \text{ div.}$$

•) Das Intervall $(a-R, a+R)$ heißt Konvergenzintervall

•) Der Konvergenzradius ist gegeben als

$$R = \frac{1}{\rho} \quad , \text{ wobei } \rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}$$

$$\leadsto R = 0 \quad \text{falls } \rho = \infty$$

$$R = \infty \quad \text{falls } \rho = 0$$

Identität und Inversen - Bedingung 10. Exkurs 28.10.24

Sei X eine beliebige nicht-leere Menge.
Dann ist die Identitätsfunktion definiert als

$$\text{id}_X(x) = x \quad \forall x \in X$$

Falls die Funktion $f: X \rightarrow Y$ bijektiv
ist, so gibt es eine eindeutige Funktion
 $g: Y \rightarrow X$ mit der Eigenschaft

$$g \circ f = \text{id}_X \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

Diese Funktion g nennt man Inverse
von f und schreibt $g = f^{-1}$

Konstruktion von f^{-1} :

zu jedem $y \in Y$ ordnen wir das eindeutige
 $x \in X$ zu, so dass $f(x) = y$.

Jede streng monoton Fkt ist 28.10.24
injektiv.

Wenn eine Funktion streng monoton
ist, gilt für alle $x_1 \neq x_2$

$x_1 > x_2$ oder $x_1 < x_2$

weshalb auch gelten muss

$f(x_1) > f(x_2)$ bzw $f(x_1) < f(x_2)$

d.h. falls $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

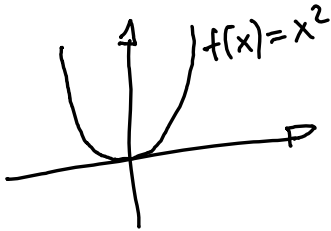
gerade / ungerade Funktionen

28.10.24

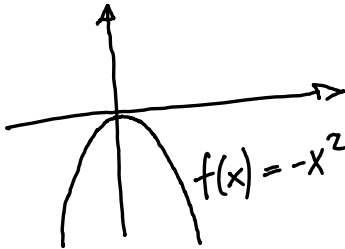
Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- falls $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$ nennen wir die Funktion gerade.
- falls $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$ nennen wir die Funktion ungerade.

Der Graph einer Funktion heißt links gekrümmt (konvex), falls der Graph beim durchlaufen von links nach rechts eine linkskurve vollführt.



Der Graph einer Funktion heißt rechts gekrümmt (konkav), falls der Graph beim durchlaufen von links nach rechts eine rechtskurve vollführt.



Grenzwert / Rechtseitig / Linksseitig 28.10.24

• Es sei $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und es gelte

$$D(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \neq \emptyset$$

Dann ist $L \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle x_0 falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.d.}$$

$$x \in D(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

• falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d.

$$x \in D(f) \cap [x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

hat f den Rechtseitigen GW L d.h.

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

• falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d.

$$x \in D(f) \cap (x_0 - \delta, x_0] \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

hat f den Linksseitigen GW L d.h.

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

Abzählbar & Überabzählbar

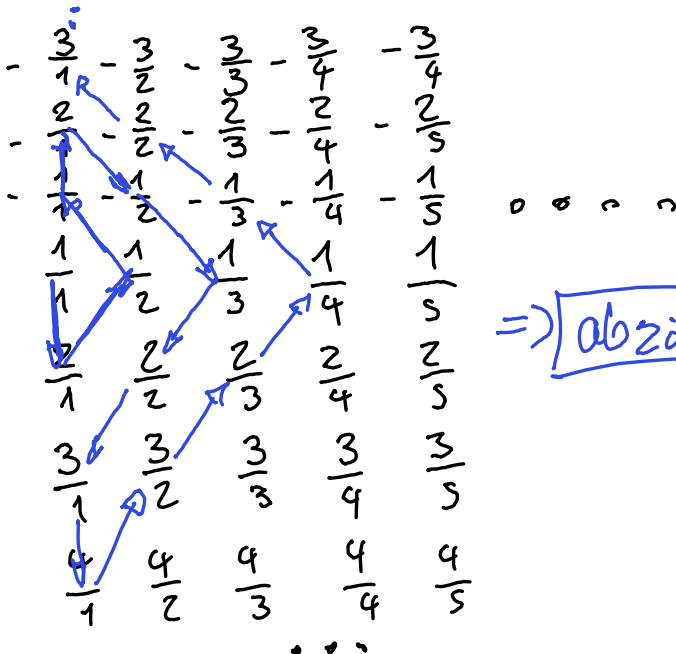
30.10.24

Eine Menge ist abzählbar, wenn eine Bijektion zu den natürlichen Zahlen konstruiert werden kann.

Anschaulich gesagt, kann man die Elemente einer Menge durchnummern und mit einer einzigen natürlichen Zahl ein jedes Element 'abrufen'.

Eine Menge ist überabzählbar, wenn keine solche Bijektion konstruiert werden kann. (z.B. für $\mathbb{R}$)

z.B.: Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$



$\Rightarrow$ abzählbar

Stetigkeit

30.10.24

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt an der Stelle x_0 stetig, falls gilt

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d. $\forall x \in D: (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$

Anschaulich gesagt haben zwei Funktionswerte zweier beliebig nahen Elemente eine beliebig kleine Differenz.

- Eine Funktion heißt stetig, falls sie für alle $x \in D$ stetig ist.
- Falls $f(x_0)$ nicht existiert, so ist die Funktion an dieser Stelle nicht stetig.

30.10.24

Folgenstetigkeit

Es sei $f: D \subset \mathbb{D}(f) \subset \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.

Dann ist f an der Stelle x_0 genau dann stetig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

Beweis

" $\Rightarrow$ " f ist an der Stelle x_0 stetig und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in D , welche gegen x_0 konvergiert.

Dann folgt aus der Def.: Stetigkeit

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
insbesondere $x \in D$.

Aus der Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ folgt,
dass $\exists N \in \mathbb{N}_0$ s.d.

$$|x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Dies bedeutet aber, dass die Folge
 $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen $f(x_0)$ konvergenz muss

" $\Leftarrow$ "

•

•

•

•

Wip.

zu lang für Kk siehe
Folien

rechtsseitig / linksseitige Stetigkeit 30.10.24

Es sei $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ und es sei $x_0 \in D$.

falls

$$\lim_{\substack{x \geq x_0 \\ x \rightarrow x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Nennen wir die Funktion an der Stelle x_0 rechtsstetig.

Linkstetigkeit ist analog dazu definiert.

Rechenregeln stetiger Funktionen

31.10.24

$f, g: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig

-) $f+g$ ist stetig
-) $f-g$ ist stetig
-) $c \cdot f$ bzw. $c \cdot g \quad \forall c \in \mathbb{R}$ sind stetig
-) $f \cdot g$ ist stetig
-) $\frac{f}{g}$ ist stetig sofern $g \neq 0$

↳ Beweise der obigen folgen aus
Folgerstetigkeit und Rechenregel der Folgen.

-) Verknüpfung stetiger Funktionen ist stetig
 $g \circ f$ ist stetig und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$

-) wenn f bijektiv und stetig ist, so ist f^{-1} also die Umkehrfunktion auch stetig.

Zwischenwertsatz

31.10.24

Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion,
und es sei c eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$.
Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.

Falls $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und $a, b \in I$
mit $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ gibt es also
auch mindestens eine Nullstelle zwischen
 a und b .

Ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall nennt man kompakt.

• Es gilt:

Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall, und es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $[a, b]$. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \quad \text{mit} \quad x_0 \in [a, b]$$

Stetige Funktion auf kompaktem Intervall 9.11.24

Es sei $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und I kompakt. Dann ist f beschränkt und f nimmt sein Maximum und Minimum auf I an.

d.h. es gibt ein $x_{\min} \in I$ und ein $x_{\max} \in I$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in I: f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$$

$\leadsto$ Aussage über lokales Maximum und Minimum

$\leadsto$ insbesondere hier Aussage über globales Max/Min.

Def: Gleichmässige Stetigkeit 7.1.24

Eine Funktion $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst genau dann gleichmässig stetig, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall x, y \in D (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

Der Unterschied zur nicht-gleichmässigen Stetigkeit ist, dass das δ unabhängig von den Argumenten x und y ist.

lokale Extrema

7.11.24

Es sei $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- falls für $x_0 \in D$ gilt $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D$
liegt an der Stelle x_0 ein lokales Maximum
- das lokale Minimum ist analog definiert.
- lokale Minima/Maxima heißen lokale Extrema

Lipschitz Stetigkeit

7.11.24

Es sei $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heisst
 f Lipschitz stetig, falls

$$\exists L \geq 0 \text{ s.d. } \forall x, y \in D: |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Anschaulich:

Ableitung einer Funktion an einem jeden Punkt
ist kleiner als L .

Es gilt:

f ist Lipschitz stetig $\Rightarrow f$ ist gleichmässig stetig

Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitungsfunktion 12.11.24

Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$. Mit $D \neq \emptyset$ und D enthält keine isolierten Punkte.

- Der Differenzenquotient ist mittlere / durchschnittliche Änderungsrate von f zwischen a und $a+h$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Mit $h \rightarrow 0$ wird der Differenzenquotient zum Differentialquotient / Ableitung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} = f'(a)$$

- Die rechtsseitige Ableitung ist gegeben als

$$\lim_{\substack{h > 0 \\ h \rightarrow 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Analog ist die linksseitige Ableitung definiert.

Differenzierbarkeit, n -fach-Differenzierbarkeit 12.11.24

Falls für eine gegebene Funktion f die Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 existiert, nennt man die Funktion f an dieser Stelle x_0 differenzierbar.

Falls f an jeder Stelle des Definitionsbereichs differenzierbar ist nennt man die Funktion differenzierbar.

! Falls f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, so ist f an der Stelle x_0 stetig ist

• Wir definieren die n -te Ableitung folgendermaßen

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Falls die n -te Ableitung existiert, nennt man f n -fach-differenzierbar falls diese n -te Ableitung auch noch stetig ist, nennt man f n -fach stetig differenzierbar

• Die Menge aller n -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf D bezeichnen wir mit $C^n(D)$.
Ausserdem setzen wir

• $C^\infty(D) := \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(D)$ sind glatte Funktionen

Summen und Produkte, Kettenregel, Quotientenregel 12.11.24

- Seien f und g an der Stelle x_0 n -fach differenzierbar

Dann gilt

$$(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$$

und

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} f^{(h)}(x_0) g^{(n-h)}(x_0)$$

- Die Kettenregel ist für $g \circ f$ differenzierbar gegeben

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

- Die Quotientenregel von $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x) \neq 0$ a/s

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Es sei $f: D \rightarrow E \subset \mathbb{R}$ eine stetige, bijektive Funktion deren Umkehrfunktion $f^{-1}: E \rightarrow D$ ebenfalls stetig ist. Ausserdem sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von $D \setminus \{x_0\}$ und es sei f an der Stelle x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$.

Dann ist f^{-1} an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$\underbrace{(f^{-1})'(x_0)}_{\text{Ableitung der Umkehrfunktion}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Es hilft sich bildlich f^{-1} als f gespiegelt an $y=x$ zu sehen. Dann ist klar, dass die Steigung von f^{-1} genau der Kehrwert der Steigung von f ist.

lokale Extremalstellen, Ableitung

18.11.24

Es sei $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. f sei an der lokalen Extremalstelle $x_0 \in D$ differenzierbar und x_0 sei sowohl ein Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ als auch von $D \cap (-\infty, x_0)$.
Dann gilt $f'(x_0) = 0$

Falls $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I sei ein Intervall und x_0 eine Extremalstelle in I .

Dann gilt mindestens einer der folgenden

-) $x_0 \in I$ ist ein Endpunkt des Intervalls
-) f ist an der Stelle x_0 nicht differenzierbar
-) f ist an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = 0$

Satz von Rolle und Mittelwertsatz 18.11.24

Es sei $a < b$ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf ganz $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion.

- Satz von Rolle

Falls gilt $f(a) = f(b)$ gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$

- Mittelwertsatz

Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Cauchy Mittelwertsatz / Erweiterter Mittelwertsatz 18.11.24

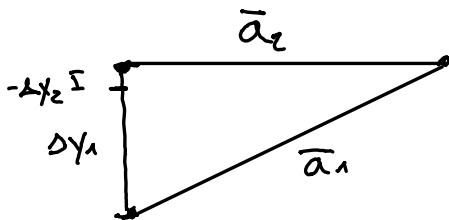
Es sei $a < b$ $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei auf ganz $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktionen.

Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$$

Falls zusätzlich gilt $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$,
dann ist auch $g(b) \neq g(a)$ und damit auch

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$



Regel von Bernoulli - l'Hospital

18.11.24

Es sei $a < b$ und $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zwei differierbare Funktionen. Außerdem sei

•) $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

•) $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow a}} g(x) = 0$

①

•) Wenn

$L = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, existiert auch

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow a}} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

•) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty}} |f(x)| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty}} |g(x)| = \infty$

•) Falls

$L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, existiert auch

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

i Es gibt noch eine dritte Version mit $R > 0$ $f, g: (R, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Konvexe und Konvexe Funktionen 25.11.24

Eine Funktion nennt man konvex auf einem Intervall falls ihr Graph auf diesem Intervall stets unterhalb der Verbindung durch zwei Punkte auf dem Graph verläuft.

Formal

Falls für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ und $t \in (0, 1)$ gilt:
$$f((1-t)a + bt) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

Falls die obige Ungleichung strikt ist, nennt man f auf I strikt konvex.

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ev. Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn f' auf I wachsend ist.

f ist genau dann konvex wenn auf I gilt $f'' \geq 0$.

- Es seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ und wir schreiben $f(x) = O(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$ falls ein $M > 0$ und $\delta > 0$ existiert, s.d.

$$x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x)| \leq M |g(x)|$$

alternative definition

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

und sagen, dass f Gross-O von g ist für $x \rightarrow x_0$

- Wir schreiben $f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$ falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, s.d.

$$x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

alternative Definition

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

und sagen, dass f klein-o von g für $x \rightarrow x_0$ ist.

Zerlegung und Verfeinerung

25.11.24

Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompakter Intervall

- Eine Zerlegung von $[a,b]$ ist eine endliche Menge von Punkte

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

Die auftretenden Punkte x_i nennen wir Unterteilungspunkte

- Eine Zerlegung $a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b$ ist eine Verfeinerung der Zerlegung

$$a = x_0 < \dots < x_n = b \quad \text{falls gilt}$$

$$\{x_i \mid 0 \leq i \leq n\} \subseteq \{y_i \mid 0 \leq i \leq m\}$$

Treppenfunktion und deren Eigenschaften 25.11.24

- Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls es eine Zerlegung $a = x_0 < \dots < x_n = b$ von $[a, b]$ gibt, s.d. für $h = 0, \dots, n$ die Restriktion von f auf (x_{h-1}, x_h) konstant sind.
- Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha f + \beta g$ auch eine Treppenfunktion.
↳ Beweis: Schnitt von abgeschlossenen Mengen ist abgesch.

Integral der Treppenfunktion, ober/untere Summe 25.11.24

Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich der Zerlegung $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Dann ist das Integral der Treppenfunktion gegeben als

$$\int_a^b f(x) dx := \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) \in \mathbb{R}$$

c_i ist dabei der Funktionswert auf $(x_{i-1}, x_i]$

• Linearität

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien Treppenfunktionen. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dann gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

• Monotonie

Wenn $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

• Obersumme (Menge der Obersummen)

$$U(f) := \left\{ \int_a^b s(x) dx \mid s \in TF, s \geq f \right\}$$

• Untersumme (Menge der Untersummen)

$$L(f) := \left\{ \int_a^b s(x) dx \mid s \in TF, s \leq f \right\}$$

Wobei TF die Menge der Treppenfunktion beschreibt.

Wann ist eine Fkt R-int'bar? 1.12.24

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen nennt man Riemann-Integrierbar, falls gilt

$$\sup(L(f)) = \inf(U(f))$$

- Darboux-Kriterium ($f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt)

Dann ist f genau dann R-int'bar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ TF $\alpha \downarrow$ existieren, s.d.

$$l \leq f \leq u \quad \text{und} \quad \int_a^b (u-l) dx < \varepsilon$$

Dann gilt auch

$$\left| \int_a^b f dx - \int_a^b l dx \right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left| \int_a^b u dx - \int_a^b f dx \right| < \varepsilon$$

Weiter betrachten wir nur Fkt auf kompakten Intervallen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:

- jede stetige Fkt ist R-int'bar
- jede stückweise stetige Fkt ist R-int'bar
- jede monotone Fkt ist R-int'bar
- jede stückweise monotone Fkt ist R-int'bar

Linearität, Monotonie und Dreiecksungleichung
des $\mathbb{R}$ -Integrals, $f^+, f^-, |f|$ 1.12.24

Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei $\mathbb{R}$ -int'bare
Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch
 $\alpha f + \beta g$ $\mathbb{R}$ -int'-bar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Falls gilt $f \leq g$ so gilt auch

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$f^+ := \max\{f(x), 0\}, \quad f^- := \max\{-f(x), 0\}, \quad |f| = f^+ + f^-$$

sind auch $\mathbb{R}$ -int'bar und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Punktweise Konvergenz, Gleichmässige 1.12.24

Konvergenz & Stetigkeit

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei eine Folge von Fkt $f_n: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.
Dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ punktweise gegen f , falls $\forall x \in D$ $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

- Falls $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0$ s.d. $\forall n \geq N \forall x \in D$ gilt
 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ konvergiert die Folge gleichmässig.
Es gilt gleichmässige Konvergenz $\Rightarrow$ punktweise Konvergenz

- Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Fkt, welche gleichmässig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.

- Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge $\mathbb{R}$ -int'barer Fkt $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, welche gleichmässig gegen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f $\mathbb{R}$ -int'bar und es gilt

$$\int_a^b f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dx$$

Stammfunktionen und HS der Int und Dif - Rechnung

2.12.24

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F'(x) = f(x)$$

nennen wir Stammfunktion von f auf dem Intervall I .

- Die Stammfunktion ist nicht eindeutig
 $F(x)$ ist SF $\Leftrightarrow F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ ist SF

- Die Menge aller SF nennen wir unbestimmtes Integral. Wir schreiben

$\int f(x) dx$ und nennen f Integrand.

Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist für alle $C \in \mathbb{R}$ die Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f mit $x \in [a, b]$

$$F(x) := \int_a^x f(y) dy + C$$

Außerdem sei jede Stammfunktion von der obigen Form.

Eigenschaften von bestimmten Integralen 4.12.24

Sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar. Dann gilt

$$\forall x \in [a, b]$$

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt$$

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Partielle Integration

4.12.24

Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

Bsp

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int \ln(x) \cdot 1 dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} x dx + C \\ &= x \ln(x) - x + C \end{aligned}$$

Substitution Vers (1)

8.12.24

I, J seien zwei Intervalle $f: I \rightarrow J$ stetig und diff'bar. $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für alle $[a, b] \subset I$

$$\int_a^b \underbrace{g(f(x)) f'(x)}_{\text{"äusser Ableitung mal innere"}} dx = [G(f(x))]_a^b = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy$$

Substitution Vers (2)

$I, J \subset \mathbb{R}$ zwei Intervalle, $f: I \rightarrow J$ stetig diff'bar. $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für $[a, b] \subset I$ gelte $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ und es sei $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ die Inverse von $f|_{[a, b]}$. Dann gilt

$$\int_a^b g(f(x)) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) (f^{-1})'(y) dy$$

Weierstrass-Substitution / Halbwinkelmethode

10.12.24

Für Integrale mit $\cos/\sin$ Termen
kann die Weierstrass-Substitution helfen.

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Dann gilt

$$\bullet) \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\bullet) \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\bullet) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+u^2}$$

$$\text{Und es gilt } \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(1+u^2) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

Partialbruchzerlegung

10.12.24

Als Integrationsstool sehr nützlich, falls wir ein Term $R(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$ haben, wobei $Z(s)$ und $N(s)$ Polynome sind und der Grad von $N(s)$ höher ist.

Für einfache Nullstellen brauchen wir dann den Summanden

$$\frac{a_{i,1}}{x - x_i}$$

für r_i -fache Nullstellen brauchen wir

$$\frac{a_{i,1}}{x - x_i} + \frac{a_{i,2}}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{a_{i,r_i}}{(x - x_i)^{r_i}}$$

Taylorapproximation

10.12.24

ähnlich wie bei der Fourrier-Reihe
die eine Funktion als Sinustone
darstellt, stellen wir mithilfe der
Taylorapproximation eine Funktion
mit einem Polynom dar.

Dieses ist gegeben als

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{n=0}^n f^{(n)}(x_0) \frac{1}{n!} (x-x_0)^n$$

Wir nennen den obigen Term n -tes
Taylorpolynom von f am Referenzpunkt x_0 .

Taylorapproximation - Restterme

11.12.24

Integrations Restterm

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{1}{k!} (x-x_0)^k + \int_{x_0}^x f^{(n)}(s) \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds$$

$$= P_{n-1}(x) + R'_{n-1}(x)$$

↳ kommt von $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(s) ds$

Lagrange Restterm

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{1}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) (x-x_0)^n$$

$$= P_{n-1}(x) + R^L_{n-1}(x)$$

wobei $\xi \in [x_0, x]$

↳ folgt aus Mittelwertsatz des Integrals $\int_{x_0}^x f'(s) ds = f'(\xi)(x-x_0)$

O-Restterm

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{1}{k!} (x-x_0)^k + O(|x-x_0|^n)$$

$$= P_{n-1}(x) + O(1)$$

Analytische Funktionen

18.12.24

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$. Eine glatte Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt bei x_0 analytisch, falls $\exists \delta > 0$ s.d. die Taylorreihe von f um den Punkt x_0 einen Konvergenzradius $R > \delta$ hat und gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{1}{n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$$

f nennen wir auf ganz I analytisch, falls f analytisch ist. z.B.

$\sin(x), \cos(x), e(x)$, wobei jeweils $R = \pm \infty$

Achtung: Es gibt glatte-nicht-analytische Fkt.

- Wenn Konstanten $r, c, A \in \mathbb{R}$ existieren, s.d.

$$|f^{(n)}(x)| \leq c A^n n! \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r), n \in \mathbb{N}_0$$

Dann ist f an der Stelle $x_0 \in I$ analytisch.

- Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. $\exists c, A \in \mathbb{R}$ s.d.

$$|f^{(n)}(x)| \leq c A^n n! \quad \forall x \in [a, b], n \in \mathbb{N}_0$$

Dann ist f auf $[a, b]$ analytisch.

DGL: Integration & Superposition

18.12.24

Eine DGL ist eine Gleichung in der die gesuchte Fkt, so wie der Ableitungen auftreten.

Ordung: Höchste auftretende Ableitung

linear: Ableitungsterme treten alleine auf

homogen: Störfunktion $S(x)=0$, falls $S(x) \neq 0$ nennen wir die DGL inhomogen.

- Wenn $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der DGL sind, so sind auch

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Lösungen der DGL.

- Eine lineare und homogene DGL n -ter Ordnung besitzt n Lösungen $y_1, \dots, y_n$ wobei die allgemeine Lösung dann gegeben ist durch $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Diese Lösung wird Fundamentallösung genannt.

Lineare & Homogene DGL

18.12.29

Mit dem Euler Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$

erhalten wir die charakteristische Gleichung,

wobei wir n -Nullstellen $\lambda_1 \dots \lambda_n$ erhalten.

(Achtung: gewisse können Multiplizität > 1 haben)

Dann ist die Lösung für $y(x)$ gegeben als

$$y(x) = \sum_{i=0}^r \left(\sum_{p=0}^{m_i-1} c_{ip} x^p e^{\lambda_i x} \right) + \sum_{j=0}^s \left(\sum_{q=0}^{m_j-1} (A_{jq} x^q e^{a_j x} \sin(b_j x) + B_{jq} x^q e^{a_j x} \cos(b_j x)) \right)$$

wobei r die Anzahl reeller Nullstellen mit jeweiliger Multiplizität m_i . s ist die Anzahl komplex-konjugierter Paare reeller Nullstellen sind (mit Multiplizität m_j).

$\Rightarrow$ wir brauchen n -Koeffizienten, d.h. n -Informationen.

inhomogen DGL

18.12.24

Die Lösung einer inhomogenen DGL ist gegeben als

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x), \text{ wobei } y_h(x)$$

die Lösung der dazugehörigen homogenen DGL ist und $y_p(x)$ die partikuläre Lösung, welche wir durch eine entsprechende Ansatz oder der Variation der Konstanten erhalten, Substitution oder Trennung der Variablen erhalten.