Definition Prädikat 19.9.24

Ein Prädikat ist eine Aussage A die von einem oder mehreren Argumenten abhängt.

z.B. $A(x,n): x^n = \sqrt{2}$ mit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

↳ Die Aussage ist nur unter bestimmten x, n gültig, weshalb sie ein Prädikat ist.

Syntax: 'es folgt' / Negation / Ägivalenz / 'für Alle' / es gibt ein / es gibt genau ein / es gibt kein / logisches und / logisches oder 19.09.24

$\Rightarrow$	es folgt	$A \Rightarrow B$
$\neg$	Negation	$\neg A$
$\Leftrightarrow$	Ägivalenz	$A \Leftrightarrow B$
$\forall$	für alle	$\forall x \in \mathbb{R} : x = x^2$ ↯
$\exists$	es gibt ein	$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1$
$\exists!$	es gibt genau ein	$\exists!\, x \geq 0 : x^2 = 1$
$\nexists$	es gibt kein	$\nexists x \in \{1,2,3\} : x = 0$
$\wedge$	logisches und	$A \wedge B$
$\vee$	logisches oder	$A \vee B$
$:=$	definiert	$X \subset Y := \forall x \in X : x \in X \Rightarrow x \in Y$

Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 28.9.24

- $\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$
- $\mathbb{N}_0$ Menge der natürlich Zahlen inkl. Null $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ Menge der rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{R}$ Menge der reelen Zahlen
- $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$
- $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$
- $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$
- $\mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0]$
- $\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen

offenes / abgeschlossenes und halboffene Intervalle 29.9.24

Die wichtigsten Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle

$I, I \subset \mathbb{R}$

• offenes Intervall

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Def: $X \subset \mathbb{R}$. X nennt man offen falls für jedes Element $x \in X$ gilt

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y \in \mathbb{R} \Big((|x-y| < \varepsilon) \Rightarrow y \in X \Big)$$

• abgeschlossenes Intervall

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Def: $X \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen falls X^c offen ist.

• halboffene Intervalle (nach unten offen)

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

beziehungsweise (nach oben offen)

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Def: obere / untere Schranke von $X \subseteq \mathbb{R}$ 30.9.24

Sup(X), Inf(X), maximum, minimum

Eine obere Schranke einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Element $y \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft

$$\forall x \in X : x \leq y$$

Das Supremum von X ist die kleinste obere Schranke und hat folgende Eigenschaften:

$$(\forall x \in X : S \geq x) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in X : S - \varepsilon < x\}$$

Die untere Schranke und die grösste untere Schranke - Infinum sind analog dazu definiert

$$\forall x \in X : x \geq y$$

bzw.

$$(\forall x \in X : l \leq x) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in X : l + \varepsilon > x\}$$

Das maximum einer Menge ist das grösste Element darin. Das minimum das kleinste.

$$\max(X) = \{x_0 \mid \forall x \in X : x \leq x_0\}$$

$$\min(X) = \{x_0 \mid \forall x \in X : x \geq x_0\}$$

Fundamentalsatz der Algebra 30.9.24

Jedes Polynom

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad a_k \in \mathbb{C}$$

kann in Linearfaktoren faktorisiert werden und geschrieben werden als

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (z - z_n)$$

Die Zahlen z_k sind also gerade die Nullstellen des Polynoms.

Ein Polynom mit Grad n hat also genau n Nullstellen (mit Vielfachheit) ⇒ zwei Linearfaktoren sind gleich

Konvergenz und Divergenz einer Folge 30.9.24

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ heisst <u>konvergent</u>, falls ein $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 : \forall n > N : |a_n - L| < \varepsilon$$

L wird dann Grenzwert genannt und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Falls kein L mit den obigen Eigenschaften existiert, nennt man die Folge <u>divergent</u>.

! Eine Folge ist <u>entweder</u> konvergent <u>oder</u> divergent.

Spezialfälle divergenter Folgen:

- $\forall M > 0 \; \exists N > 0 \; \forall n > N : a_n > M \rightsquigarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$
  $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ "Die Folge <u>divergiert</u> gegen unendlich"

- $\forall M > 0 \; \exists N > 0 \; \forall n > N : a_n < -M \rightsquigarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$
  $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ "Die Folge <u>divergiert</u> gegen $-\infty$"

Def: Teilfolge

30.9.24

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.
Eine Teilfolge ist eine Folge der Form

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$$

wobei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine folge nicht-negativer ganzer Zahlen ist und dabei
$n_{k+1} > n_k$ für alle $k\in\mathbb{N}_0$ gilt.
↳ Auswahl von Folgenglieder gemäss (a_{n_k})

! Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ist auch
$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$. Eine Folge und all deren Teilfolge haben denselben Grenzwert L.

Def: Häufungspunkt

30.9.24

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$

Ein Häufungspunkt $A \in \mathbb{R}$ erfüllt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N}_0 \ \exists n \geq N : |a_n - A| < \varepsilon$$

Beim Häufungspunkt (im Intervall $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$) befinden sich unendlich viele Punkte/Folgeglieder aus a_n

Beachte: Wenn L ein Grenzwert ist, ist L auch ein Häufungspunkt

Beweis: Eine konvergente Folge besitzt genau 3.10.24
<u>einen</u> eindeutigen Grenzwert.

Wir nehmen an, es gibt zwei Grenzwerte A und B der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Dies bedeutet, es existiert ein $N_A \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq N_A$$

andererseits aber auch $N_B \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq N_B$$

Nun setzen wir $N := \max\{N_A, N_B\}$

Damit gilt dann

$$|A - B| \leq |A - a_n| + |a_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Da diese Überlegungen für alle $\varepsilon > 0$ gelten, muss schlussendlich gelten

$$|A - B| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow A = B$$

$\square$

Sandwich Theorem

7.10.24

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei konvergente Folgen mit demselben Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Sowie die dritte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit der Eigenschaft, dass ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \geq N_0$$

Dann ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auch konvegent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

Bsp. $g_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} \qquad (n \geq 1)$

$$(3^n)^{1/n} \leq (2^n + 3^n)^{1/n} \leq (3^n + 3^n)^{1/n}$$

$\Rightarrow (3^n)^{1/n} = 3$ und $(3^n + 3^n)^{1/n} = 2^{1/n} \cdot 3$

mit $\lim\limits_{n\to\infty}$ gilt

$$3 \leq \lim_{n\to\infty} (2^n + 3^n)^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} \cdot 3 = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (2^n + 3^n)^{1/n} = 3$$

Begriffe: beschränkt, monoton fallend / wachsend, 7.10.24
streng monoton fallend / wachsend

Eine Folge ist nach oben beschränkt, wenn

$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \leq x$

bzw. nach unten beschränkt, wenn

$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \geq y$

bzw nach oben und unten beschränkt (kurz besch.)

$\exists x, y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : y \leq a_n \leq x$

Eine Folge ist monoton fallend, wenn jedes folgende Folgeglied kleiner-gleich dem vorherigen ist:

$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : m > n \Rightarrow a_m \leq a_n$

bzw. monoton wachsend

$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$

Eine Folge ist streng monoton fallend, wenn:

$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : m > n \Rightarrow a_m < a_n$ (strikte Ungleichung)

bzw streng monoton wachsend:

$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : m > n \Rightarrow a_m > a_n$

Beweis: jede konvergente Folge ist beschränkt. 7.10.24

Da die Folge konvergiert gibt es ein Index N_1 mit der Eigenschaft:

$\forall n \geq N_1: |a_n - L| \leq 1$ wenn $\lim_{n \to \infty} a_n = L$

Damit haben wir

$|a_n| = |a_n - L + L| \leq 1 + |L| \quad \forall n \geq N_1$

Wir setzen nun $M := \max\{|a_0|, |a_1| \dots |a_{N_1 - 1}|, 1 + |L|\}$

Da M nur endlich viele Elemente enthält gilt: $|a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Die betrachtete Folge a_n ist beschränkt. $\square$

ⓘ Die 1 hier ist willkürlich gewählt.

Beweis: Dreiecksungleichung

7.10.24

Dreiecksungleichung: $\forall z, w \in \mathbb{C}$

$$|z+w| \le |z| + |w|$$

Beweis:

Lemma: Für beliebige komplexe Zahlen $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$ gilt:

$$x_1x_2 + y_1y_2 \le |z| \cdot |w|$$ (*) Chauchy-Schwarz-Ungleichung

Beweis zu Lemma:

$$\underbrace{|z|^2 \cdot |w|^2}_{(x_1^2+y_1^2)\cdot(x_2^2+y_2^2)} - (x_1x_2 + y_1y_2)^2 = \dots \ge 0$$

$\Rightarrow$ (*) lässt sich einfach folgern

Beweis der Dreiecksungleichung:

$$|z+w|^2 = \dots\dots$$

?

$\rightsquigarrow$ noch nicht schreiben

Beweis: Eine monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist 7.10.24

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente monotone Folge.
Wir können beweisen, dass sie dann auch beschränkt ist ($\rightsquigarrow$ siehe KK: konvergente Folge ist besch.).
Wir gehen von einer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus, die monoton wachsend und beschränkt ist (Fall einer fallenden Folge ist analog zu behandeln).
Da die Folge also beschränkt ist gibt es ein $M\in\mathbb{R}$, so dass $|a_n|\leq M \;\forall n\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow a_n\leq M \;\forall n\in\mathbb{N}_0$.
Dann kann ich auch die folgende Menge betrachten:

$X:=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}_0\}$ $\rightsquigarrow$ Menge aller Folgeglieder

Die Menge X ist nach oben beschränkt.
Daraus folgt nun, dass $S:=\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}_0\}$ existiert.
Wir wollen als nächstes zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen S konvergiert.

Es gilt:

i) $a_n\leq S \quad \forall n\in\mathbb{N}_0$

ii) $\forall \varepsilon>0 \;\exists N\in\mathbb{N}_0$ mit $a_N>S-\varepsilon$

Dann haben wir für $n\geq N$:

$$S-\varepsilon < a_N \leq a_n \leq S < S+\varepsilon$$

bzw.

$$\forall\varepsilon>0\;\exists N\in\mathbb{N}_0 : \forall n\geq N: |a_n-S|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = S$$

$\square$

Limes Superior / Limes Inferior 9.10.24

Wir beginnen mit der beschränkten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Weiter setzen wir $s_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$

und $i_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\}$

Dabei sind a_k Teilfolgen.

Eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei beschränkt und monoton <u>fallend.</u> ⇒ Sie konvergiert also auch.

Analog dazu ist $(i_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt und monoton <u>wachsend</u> ⇒ konvergiert auch

Dann gilt

"Limes Superior" $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup\{a_k \mid k \geq n\}}_{s_n}$

"Limes Inferior" $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\inf\{a_k \mid k \geq n\}}_{i_n}$

⇒ Die grösse des Limes Superior kann als grösster Häufungspunkt der Folge a_n verstanden werden. Limes Inferior analog dazu als kleinster Häufungspunkt.

Def: Cauchy-Folge 10.10.24

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ heisst Cauchy-Folge, falls für jedes $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$\forall m,n\geq N \ |a_n-a_m|<\varepsilon$$

Anschaulich gesagt, müssen zwei Folgeglieder, mit einem grösseren Index als N beliebig nahe aneinander sein.

! Achtung: Es gilt nicht immer $n=m+1$, die Folgeglieder können auch andere Indizes dazwischen haben.

Beweis: Jede Cauchy-Folge ist beschränkt 10.10.24

Ab dem N-ten Folgeglied können a_n und a_m maximal die Differenz ε haben. Mit einem frei gewählten ε, z.B. $\varepsilon = 1$ kann also ein jedes Folgeglied nicht weiter von a_N entfernt sein als $\varepsilon = 1$. Da N endlich ist, und alle folgenden Folgeglieder im ε-Ball mit Radius 1 sein müssen, ist die Folge beschränkt $\square$

Beweis: Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist 10.10.24

„⇒" Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert L. Dann existiert für $\varepsilon>0$ ein Index N mit

$$|a_n-L|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n\geq N$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}|a_n-a_m| &= |a_n-L+L-a_m| \\ &\leq |a_n-L|+|L-a_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad \forall m,n\geq N\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist.

„⇐" Umgekehrt gehen wir von einer Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus.
Dann ist diese Folge insbesondere beschränkt.
Daraus folgt wiederum, dass eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ existiert mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=L$

Def: Reihe

14.10.24

Ein formaler Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

nennt man Reihe und die a_i heissen Summanden / Glieder oder Elemente der Reihe.

Konvergenz von Reihen

14.10.24

Falls die Folge der Teilsummen (Partialsummen)

$$S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

FOLGENGLIED

mit $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert $L < \infty$ konvergiert, so sagen wir, dass die Reihe konvergiert und schreiben

$$\lim_{n \to \infty} S_n = a_0 + a_1 \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = L$$

↳ L nennt man auch <u>Wert</u> der Reihe.

- Falls eine Reihe konvergiert, muss auch gelten, dass

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

↳ Summand ist bei genug grossen n beliebig klein.

Man nennt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dann auch Nullfolge.

- Eine Reihe die nicht konvergiert divergiert.

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert 14.10.24

$\rightsquigarrow$ noch ein Beweis vorhanden

Vergleichskriterium (Majorant/Minorant) 17.10.24

Wir betrachten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

mit nicht-negativen Gliedern und für eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$c_n \leq b_n \leq a_n \quad \forall n \geq N$$

Dann gilt

- falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv, konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (Majorantkriterium)
- falls $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergiert, divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (Minorantkriterium)

Def: absolut / bedingt konvergent 17.10.24

- Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nennt man <u>absolut konvergent</u>, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert
- Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nennt man <u>bedingt konvergent</u>, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, jedoch nicht absolut konvergiert.

Riemannscher Umordnungssatz 17.10.24

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe reeler Summanden, und es sei $L \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, so dass gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = L \rightsquigarrow \text{nicht (zwingend) Grenzwert}$$

↳ auch nicht eindeutig

$\varphi: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ kann man sich vorstellen als Tausch der Reihenfolge von Summanden.

"Es gibt bei bedingt konvergenten Folgen die Möglichkeit die Summanden um-zu-ordnen, damit sie auf einen beliebigen Wert L kommen."

Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen 17.10.24

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine <u>absolut konvergente</u> Reihe reeler Summanden und es sei $\varphi: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Bijektion.
Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ absolut und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Cauchy-Verdichtungssatz 17.10.24

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer Elemente.

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert}$$

„$\Rightarrow$": Da die Reihe monoton fallend ist gilt $\sum^{2^n} a_n \geq 2^n a_{2^n}$.

„$\Leftarrow$": Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_{2^n} = 0$ konvergiert die Folge. Da $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \neq 0$ muss a_{2^n} mit $n \to \infty$ Null sein, weshalb auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und somit auch die linke Seite konvergiert.

Leibniz Kriterium

17.10.24

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen, welche <u>gegen Null</u> konvergiert.

Dann konvergiert die <u>alternierende Reihe</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{2m+1} (-1)^n a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \leq \sum_{n=0}^{2m} (-1)^n a_n \quad \forall m\in\mathbb{N}_0$$

Cauchy Kriterium 17.10.24

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass für $n \geq m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon \quad \rightsquigarrow \text{siehe } \underline{\text{Cauchy-Folge}}$$

Wurzel-Kriterium

21.10.24

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. und es sei

$$\rho = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Dann gilt:

$\rho < 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

$\rho > 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

$\rho = 1$: keine Mögliche Aussage über Konvergenzverhalten

Quotienten - Kriterium 23.10.24

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ und es sei

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Dann gilt

- $\rho < 1$: dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut
- $\rho > 1$: dann divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
- $\rho = 1$: keine möglichen Aussagen über das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Produkt zweier abs. konv. Reihen & Cauchy-Produkt 23.10.24

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen.

- Es sei $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine Bijektion.

  Dann schreiben wir

  $$\varphi(n) = (\varphi_1(n), \varphi_2(n)) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

  Und es gilt

  $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi_1(n)} b_{\varphi_2(n)}$$

  konvergiert absolut.

- Ausserdem ist das <u>Cauchy-Produkt</u> folgendermassen definiert:

  $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right)$$

  und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut.

Def: Potenzreihe & Konvergenz Radius & Konvergenzintervall

24.10.25

Die Reihe der Form

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

heisst Potenzreihe um den Entwicklungspunkt a mit Koeffizienten c_n und Argument x.

Falls für ein festes x die Partialsumme

$$S_n(x) = \sum_{n=0}^{n} c_n (x-a)^n$$ konvergiert, so sagen wir die Potenzreihe konvergiert für das x.

Es gilt

-) Jede Potenzreihe besitzt einen <u>Konvergenzradius</u> R, so dass gilt
  - $|x-a| < R \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ konv.
  - $|x-a| > R \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ div.
-) Das Intervall $(a-R, a+R)$ heisst <u>Konvergenzintervall</u>
-) Der Konvergenzradius ist gegeben als

$$R = \frac{1}{\rho} \quad \text{, wobei } \rho = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}$$

$$\rightsquigarrow R = 0 \quad \text{falls } \rho = \infty$$

$$R = \infty \quad \text{falls } \rho = 0$$

Identität und Inverse – Bedingung f. Existenz 28.10.24

Sei X eine beliebige nicht-leere Menge. Dann ist die Identitätsfunktion definiert als

$$id_X(x) = x \qquad \forall x \in X$$

Falls die Funktion $f: X \to Y$ bijektiv ist, so gibt es eine eindeutige Funktion $g: Y \to X$ mit der Eigenschaft

$$g \circ f = id_X \qquad f \circ g = id_Y$$

Diese Funktion g nennt man Inverse von f und schreibt $g = f^{-1}$

Konstruktion von f^{-1}:
Zu jedem $y \in Y$ ordnen wir das eindeutige $x \in X$ zu, so dass $f(x) = y$.

Jede Streng monotone Fkt ist 28.10.24
injektiv.

Wenn eine Funktion streng monoton ist, gilt für alle $x_1 \neq x_2$

$x_1 > x_2$ oder $x_1 < x_2$

weshalb auch gelten muss

$f(x_1) > f(x_2)$ bzw $f(x_1) < f(x_2)$

d.h. falls $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

gerade / ungerade Funktionen

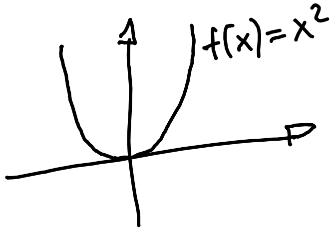
28.10.24

Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

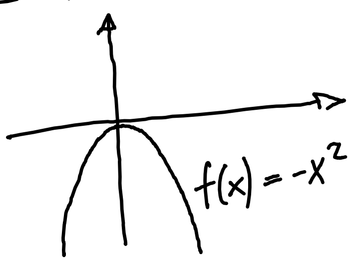
- falls $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = f(x)$ nennen wir die Funktion <u>gerade</u>.
- falls $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$ nennen wir die Funktion <u>ungerade</u>.

Links/Rechtskrümmung konvex/konkav 28.10.24

Der Graph einer Funktion heisst linksgekrümmt (konvex), falls der Graph beim durchlaufen von links nach rechts eine Linkskurve vollführt.



Der Graph einer Funktion heisst rechtsgekrümmt (konkav), falls der Graph beim durchlaufen von links nach rechts eine Rechtskurve vollführt.



Grenzwert / Rechtsseitig / linksseitig 28.10.24

- Es sei $f: \mathbb{D}(f) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und es gelte

$\mathbb{D}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \neq \emptyset$

Dann ist $L \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle x_0 falls gilt

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d.

$x \in \mathbb{D}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

- falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d.

$x \in \mathbb{D}(f) \cap [x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

hat f den Rechtsseitigen GW L d.h

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

- falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d.

$x \in \mathbb{D}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0] \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

hat f den Linksseitigen GW L d.h.

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

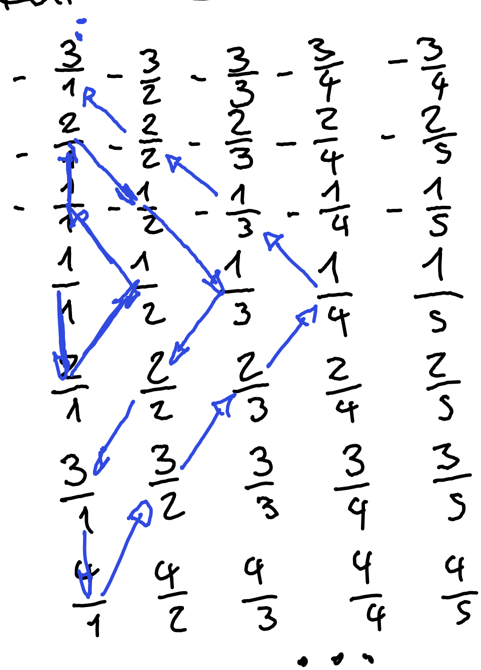
Abzählbar & Überabzählbar

30.10.24

Eine Menge ist abzählbar, wenn eine Bijektion zu den natürlich Zahlen konstruiert werden kann.
Anschaulich gesagt, kann man die Elemente einer Menge durchnummerieren und mit einer einzigen Natürlich Zahl ein jedes Element 'abrufen'.

Eine Menge ist überabzählbar, wenn keine solche Bijektion konstruiert werden kann. (z.B. für $\mathbb{R}$)

z.B: Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$



$\Rightarrow$ $\boxed{\text{abzählbar}}$

Stetigkeit

30.10.24

Eine Funktion $f: \mathbb{D} \Rightarrow \mathbb{R}$ heisst an der Stelle x_0 stetig, falls gilt

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d. $\forall x \in \mathbb{D}: \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right)$

Anschaulich gesagt haben zwei Funktionswerte zweier beliebig nahen Elemente eine beliebig kleine Differenz.

- Eine Funktion heisst stetig, falls sie für alle $x \in \mathbb{D}$ stetig ist.
- Falls $f(x_0)$ nicht existiert, so ist die Funktion an dieser Stelle nicht stetig.

Folgenstetigkeit

30.10.24

Es sei $f: D \subset D(f) \subset \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann ist f an der Stelle x_0 genau dann stetig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_n \to x_0$ die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

Beweis

„$\Rightarrow$" f ist an der Stelle x_0 stetig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in D, welche gegen x_0 konvergiert.

Dann folgt aus der Def: Stetigkeit

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

insbesondere $x \in D$.

Aus der Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ folgt, dass $\exists N \in \mathbb{N}_0$ s.d.

$|x_n - x| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

dies bedeutet aber, dass die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen $f(x_0)$ konvergieren muss

„$\Leftarrow$"

⋮

$\boxed{\text{WiP}}$

zu lange für KK siehe Folien

rechtsseitige / linksseitige Stetigkeit 30.10.24

Es sei $f: \mathbb{D}(f) \to \mathbb{R}$ und es sei $x_0 \in \mathbb{D}$.

falls

$$\lim_{\substack{x \geq x_0 \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$$

nennen wir die Funktion an der Stelle x_0 rechtsstetig.

Linksstetigkeit ist analog dazu definiert.

Rechenregeln stetiger Funktionen 31.10.24

$f, g: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig

-) $f+g$ ist stetig
-) $f-g$ ist stetig
-) $c \cdot f$ bzw $c \cdot g$ $\forall c \in \mathbb{R}$ sind stetig
-) $f \cdot g$ ist stetig
-) $\frac{f}{g}$ ist stetig sofern $g \neq 0$

$\Rightarrow$ Beweise der obigen folgen aus Folgenstetigkeit und Rechenregel der Folgen.

-) Verknüpfung stetiger Funktionen ist stetig
  $g \circ f$ ist stetig und es gilt
  $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))$
-) wenn f bijektiv und stetig ist, so ist f^{-1} also die Umkehrfunktion auch stetig.

Zwischenwertsatz

31.10.24

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und es sei c eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=c$

Falls $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig ist und $a,b\in I$ mit $f(a)<0$, $f(b)>0$ gibt es also auch mindestens eine Nullstelle zwischen a und b.

Kompaktes Intervall

4.11.24

Ein <u>beschränktes</u> und <u>abgeschlossenes</u> Intervall nennt man <u>kompakt</u>.

- Es gilt:
  Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall, und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $[a,b]$. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit

  $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ mit $x_0 \in [a,b]$

Stetige Funktion auf kompaktem Intervall

9.11.24

Es sei $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und I kompakt. Dann ist f beschränkt und f nimmt sein Maximum und Minimum auf I an.
d.h. es gibt ein $x_{min} \in I$ und ein $x_{max} \in I$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in I: f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

⇝ Aussage über lokales Maximum und Minimum

⇝ insbesondere keine Aussage über globales Max/Min.

Def: Gleichmässige Stetigkeit 7.11.24

Eine Funktion $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst genau dann gleichmässig stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall x, y \in D \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right)$$

Der Unterschied zur nicht-gleichmässigen Stetigkeit ist, dass das δ unabhängig von den Argumenten x und y ist.

lokale Extrema

7.11.24

Es sei $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- falls für $x_0 \in D$ gilt $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in D$ liegt an der Stelle x_0 ein lokales Maximum
- das lokale Minimum ist analog definiert.
- lokale Minima/Maxima heissen lokale Extrema

Lipschitz Stetigkeit

7.11.24

Es sei $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann heisst f lipschitz stetig, falls

$\exists L \geq 0$ s.d. $\forall x, y \in D: |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$

Anschaulich:
Ableitung einer Funktion an einem jeden Punkt ist kleiner als L.

Es gilt:
f ist lipschitz stetig $\Rightarrow$ f ist gleichmässig stetig

Differenzenquotient, Differenzialquotient, Ableitungsfunktion 12.11.24

Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$. Mit $D \neq \emptyset$ und D enthält keine isolierten Punkte.

- Der Differenzenquotient ist mittlere/durchschnittliche Änderungsrate von f zwischen a und $a+h$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Mit $h \to 0$ wird der Differenzenquotient zum Differentialquotient / Ableitung

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = f'(a)$$

- Die rechtsseitige Ableitung ist gegeben als

$$\lim_{\substack{h>0 \\ h \to 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Analog ist die linksseitige Ableitung definiert.

Differenzierbarkeit, n-fach-Differenzierbarkeit 12.11.24

Falls für eine gegeben Funktion f die Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 existiert, nennen wir die Funktion f an dieser Stelle x_0 differenzierbar. Falls f an jeder Stelle des Definitionsbereiches differenzierbar ist nennt man die Funktion differenzierbar.

! Falls f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, so ist f an der Stelle x_0 stetig ist.

- Wir definieren die n-te Ableitung folgendermassen

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

Falls die n-te Ableitung existiert, nennen wir f n-fach-differenzierbar falls diese n-te Ableitung auch noch stetig ist, nennen wir f n-fach stetig differenzierbar

- Die Menge alle n-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf D bezeichnen wir mit $C^n(D)$.

Ausserdem setzen wir

- $C^\infty(D) := \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(D)$ sind <u>glatte</u> Funktionen

Summe und Produkte, Kettenregel, Quotientenregel 12.11.24

- Seien f und g an der Stelle x_0 n-fach differenzierbar.

Dann gilt

$$(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$$

und

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0)$$

- Die Kettenregel ist für $g \circ f$ differenzierbar gegeben

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

- Die Quotientenregel von $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x) \neq 0$ als

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Es sei $f: D \to E \subset \mathbb{R}$ eine stetige, bijektive Funktion deren Umkehrfunktion $f^{-1}: E \to D$ ebenfalls stetig ist. Ausserdem sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von $D \setminus \{x_0\}$ und es sei f an der Stelle x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$.

Dann ist f^{-1} an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$\underbrace{\left(f^{-1}\right)'(x_0)}_{\text{Ableitung der Umkehrfunktion}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Es hilft sich bildlich f^{-1} als f gespiegelt an $y=x$ zu sehen. Dann ist klar, dass die Steigung von f^{-1} genau der Kehrwert der Steigung von f ist.

lokale Extremalstellen, Ableitung 18.11.24

Es sei $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f sei an der lokalen Extremalstelle $x_0 \in D$ differenzierbar und x_0 sei sowohl ein Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ als auch von $D \cap (-\infty, x_0)$.
Dann gilt $f'(x_0) = 0$

Falls $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I sei ein Intervall und x_0 eine Extremalstelle in I.
Dann gilt mindestens einer der folgenden

- $x_0 \in I$ ist ein Endpunkt des Intervalls
- f ist an der Stelle x_0 nicht differenzierbar
- f ist an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = 0$

Satz von Rolle und Mittelwertsatz 18.11.24

Es sei $a<b$ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine auf ganz $[a,b]$ stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktion.

- Satz von Rolle
  Falls gilt $f(a)=f(b)$ gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=0$

- Mittelwertsatz
  Es gibt ein $\xi\in(a,b)$ mit
  $$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

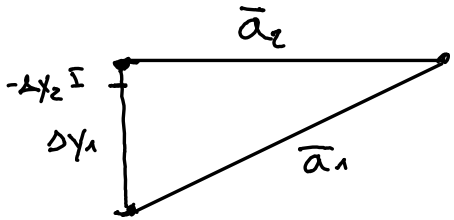
Cauchy Mittelwertsatz / Erweiterter Mittelwertsatz 18.11.24

Es sei $a<b$ $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ zwei auf ganz $[a,b]$ stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktionen.
Dann gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit

$$g'(\xi)(f(b)-f(a)) = f'(\xi)(g(b)-g(a))$$

Falls zusätzlich gilt $g'(x)\neq 0 \;\forall x\in(a,b)$, dann ist auch $g(b)\neq g(a)$ und damit auch

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$



Regel von Bernoulli - l'Hospital

18.11.24

Es sei $a<b$ und $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Ausserdem sei

- $g(x)\neq 0$ und $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$

(1)

- $\lim\limits_{\substack{x>a\\x\to a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x>a\\x\to a}} g(x) = 0$
- Wenn

$$L=\lim_{\substack{x>a\\x\to a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ existiert, existiert auch

$$\lim_{\substack{x>a\\x\to a}} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

- $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to\infty}} |f(x)| = \lim\limits_{\substack{x>0\\x\to\infty}} |g(x)| = \infty$
- Falls

$$L=\lim_{\substack{x>0\\x\to\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ existiert, existiert auch

$$\lim_{\substack{x>0\\x\to\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

i Es gibt noch eine dritte Version mit $R>0$ $f,g:(R,\infty)\to\mathbb{R}$

Konkave und konvexe Funktionen 25.11.24

Eine Funktion nennt man auf einem Intervall konvex falls ihr Graph auf diesem Intervall stets unterhalb der Verbindung durch zwei Punkte auf dem Graph verläuft.

Formal

Falls für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ und $t \in (0,1)$ gilt:

$f((1-t)a + bt) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$

Falls die obige Ungleichung strikt ist, nennt man f auf I strikt konvex.

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn f' auf I wachsend ist.

f ist genau dann konvex wenn auf I gilt $f'' \geq 0$.

Landau Gross-O / klein-o   25.11.24

- Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ und wir schreiben $f(x) = O(g(x))$ für $x \to x_0$ falls ein $M > 0$ und $\delta > 0$ existiert, s.d.

  $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x)| \leq M|g(x)|$

  alternative definition

  $$\boxed{\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty}$$

  und sagen, dass f Gross-O von g ist für $x \to x_0$

- Wir schreiben $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$ falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, s.d.

  $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$

  alternative Definition

  $$\boxed{\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0}$$

  und sage, dass f klein-o von g für $x \to x_0$ ist.

Zerlegung und Verfeinerung

25.11.24

Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall

- Eine Zerlegung von $[a,b]$ ist eine endliche Menge von Punkten

  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ mit $n \in \mathbb{N}$

  Die auftretenden Punkte x_i nennen wir Unterteilungspunkte

- Eine Zerlegung $a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b$ ist eine Verfeinerung der Zerlegung

  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ falls gilt

  $$\{x_i \mid 0 \leq i \leq n\} \subseteq \{y_i \mid 0 \leq i \leq m\}$$

Treppenfunktion und deren Eigenschaften 25.11.24

- Eine Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ heisst Treppenfunktion, falls es eine Zerlegung $a = x_0 < \dots < x_n = b$ von $[a,b]$ gibt, s.d. für $k = 0, \dots, n$ die Restriktionen von f auf (x_{k-1}, x_k) konstant sind.
- Es seien $f, g:[a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktion und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha f + \beta g$ auch eine Treppenfunktion
  $\to$ Beweis: Schnitt von abgeschlossen Mengen ist abges.

Integral der Treppenfunktion, Ober/Untersumme 25.11.24

Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich der Zerlegung $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Dann ist das Integral der Treppenfunktion gegeben als

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{h=1}^{n} c_h (x_h - x_{h-1}) \in \mathbb{R}$$

c_h ist dabei der Funktionswert auf $(x_h - x_{h-1})$

- <u>Linearität</u>

$f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ seien Treppenfunktionen. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dann gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

- <u>Monotonie</u>

wenn $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$ dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

- <u>Obersumme</u> (Menge der Obersummen)

$$U(f) := \left\{ \int_a^b s(x)\,dx \,\middle|\, s \in TF,\ s \geq f \right\}$$

- <u>Untersumme</u> (Menge der Untersummen)

$$L(f) := \left\{ \int_a^b s(x)\,dx \,\middle|\, s \in TF,\ s \leq f \right\}$$

wobei TF die Menge der Treppenfunktion beschreibt.

Wann ist eine Fkt R-int'bar? 1.12.24

Eine Funktion $f:[a,b]$ beschränkte Funktion nennt man Riemann-Integrierbar, falls gilt

$$\sup(L(f)) = \inf(U(f))$$

- Darboux-Kriterium ($f:[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt)

Dann ist f genau dann R-int'bar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ TF u l existieren, s.d.

$$l \leq f \leq u \quad \text{und} \quad \int_a^b (u-l)\,dx < \varepsilon$$

Dann gilt auch

$$\left|\int_a^b f\,dx - \int_a^b l\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left|\int_a^b u\,dx - \int_a^b f\,dx\right| < \varepsilon$$

Weiter betrachten wir nur Fkt auf kompakten Intervallen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Jede stetige Fkt ist R-int'bar
- Jede stückweise stetige Fkt ist R-int'bar
- Jede monotone Fkt ist R-int-bar
- Jede stückweise monotone Fkt ist R-int'bar

Linearität, Monotonie und Dreiecksgleichung des R-Integrals, $f^+, f^-, |f|$ 1.12.24

Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei R-int'bare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha f + \beta g$ R-int-bar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Falls gilt $f \leq g$ so gilt auch

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

$f^+ := \max\{f(x), 0\}$, $f^- := \max\{-f(x), 0\}$, $|f| = f^+ + f^-$ sind auch R-int'bar und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Punktweise Konvergenz, Gleichmässige Konvergenz & Stetigkeit 1.12.24

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei eine Folge von Fkt $f_n: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ punktweise gegen f, falls $\forall x\in D$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

- Falls $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}_0$ s.d. $\forall n\geq N\ \forall x\in D$ gilt $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ konvergiert die Folge gleichmässig.

Es gilt gleichmässige Konvergenz $\Rightarrow$ punktweise Konvergenz

- Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Fkt, welche gleichmässig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.

- Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge R-int'bare Fkt $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, welche gleichmässig gegen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f R-int'bar und es gilt

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,dx$$

Stammfunktion und HS der Int und Dif - Rechnung 2.12.24

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f(x): I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F(x): I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F'(x) = f(x)$$

nennen wir Stammfunktion von f auf dem Intervall I.

- Die Stammfunktion ist nicht eindeutig
  $F(x)$ ist SF $\Leftrightarrow$ $F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ ist SF
- Die Menge alle SF nennen wir unbestimmtes Integral. Wir schreiben
  $\int f(x)\,dx$ und nennen f integrand.

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist für alle $C \in \mathbb{R}$ die Funktion $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f mit $x \in [a,b]$

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,dy + C$$

Ausserdem sei jede Stammfunktion von der obigen Form.

Eigenschaften von bestimmten Integralen

4.12.24

Sei $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar. Dann gilt
$\forall x \in [a,b]$

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$$

Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Partielle Integration

4.12.24

Es seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Bsp

$$\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x)\,1\,dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}\,x\,dx + C$$

$$\boxed{= x\ln(x) - x + C}$$

Substitution Vers (1) 8.12.24

I, J seien zwei Intervalle $f: I \to J$ stetig und diff'bar. $g: J \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für alle $[a,b] \subset I$

$$\int_a^b \underbrace{g(f(x)) f'(x)}_{\text{"äusser Ableitung mal innere"}} dx = \left[G(f(x))\right]_a^b = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy$$

Substitution Vers (2)

$I, J \subset \mathbb{R}$ zwei Intervalle, $f: I \to J$ stetig diff'bar. $g: J \to \mathbb{R}$ stetig. Für $[a,b] \subset I$ gelte $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$ und es sei $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ die Inverse von $f|_{[a,b]}$. Dann gilt

$$\int_a^b g(f(x))\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) (f^{-1})'(y)\, dy$$

Weierstrass-Substitution / Halbwinkelmethode

10.12.24

Für Integrale mit cos/sin Termen kann die Weierstrass-Substitution helfen.

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Dann gilt

- $\cos(x) = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$
- $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$
- $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+u^2}$

Und es gilt $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(1+u^2) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}du$

10.12.24

Partialbruchzerlegung

Als Integrationstool sehr nützlich, falls wir ein Term $R(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$ haben, wobei $Z(s)$ und $N(s)$ Polynome sind und der Grad von $N(s)$ höher ist.

Für einfache Nullstellen brauchen wir dann den Summanden

$$\frac{a_{i1}}{x-x_i}$$

für r_i-fache Nullstellen brauchen wir

$$\frac{a_{i1}}{x-x_i} + \frac{a_{i2}}{(x-x_i)^2} + \cdots + \frac{a_{ir_i}}{(x-x_i)^{r_i}}$$

Taylorapproximation

10.12.24

ähnlich wie bei der Fourier-Reihe die eine Funktion als Sinusterme darstellt, stellen wir mithilfe der Taylorapproximation eine Funktion mit einem Polynom dar.

Dieses ist gegeben als

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{1}{k!} (x - x_0)^k$$

Wir nennen den obigen Term n-tes Taylorpolynom von f am Referenzpunkt x_0.

Taylorapproximation - Restterme 11.12.24

Integrations Restterm

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{1}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(s) \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds$$

$$= P_{n-1}(x) + R^{I}_{n-1}(x)$$

⇝ kommt von $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(s) ds$

Lagrange Restterm

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{1}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n$$

$$= P_{n-1}(x) + R^{L}_{n-1}(x)$$

wobei $\xi \in [x_0, x]$

⇝ folgt aus Mittelwertsatz des Integrals $\int_{x_0}^{x} f'(s) ds = f'(\xi)(x - x_0)$

O-Restterm

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{1}{k!} (x - x_0)^k + O(|x - x_0|^n)$$

$$= P_{n-1}(x) + O(1)$$

Analytische Funktionen

18.12.24

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$. Eine glatte Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heisst bei x_0 analytisch, falls $\exists \delta > 0$ s.d. die Taylorreihe von f um den Punkt x_0 einen Konvergenzradius $R > \delta$ hat und gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x_0) \frac{1}{k!} (x - x_0)^k \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$$

f nennen wir auf ganz I analytisch, falls f analytisch ist. z.B.

$\sin(x)$, $\cos(x)$, $e(x)$, wobei jeweils $R = \pm\infty$

Achtung: Es gibt glatte-nicht-analytische Fkt.

- Wenn Konstanten $r, c, A \in \mathbb{R}$ existieren, s.d.

  $|f^{(n)}(x)| \leq c A^n n! \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r), n \in \mathbb{N}_0$

  Dann ist f an der Stelle $x_0 \in I$ analytisch

- Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ glatt. $\exists c, A \in \mathbb{R}$ s.d.

  $|f^{(n)}(x)| \leq c A^n n! \quad \forall x \in [a,b]\ n \in \mathbb{N}_0$

  Dann ist f auf $[a,b]$ analytisch.

DGL: Kategorien & Superposition 18.12.24

Eine DGL ist eine Gleichung in der die gesuchte Fkt, so wie den Ableitungen auftreten.

Ordnung: höchste auftretende Ableitung

linear: Ableitungsterme treten alleine auf

homogen: Störfunktion $S(x)=0$, falls $S(x)\neq 0$ nennen wir die DGL inhomogen.

- Wenn $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der DGL sind, so sind auch

$$y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Lösungen der DGL.

- Eine lineare und homogene DGL n-ter Ordnung besitzt n Lösungen $y_1 \ldots y_n$ wobei die allgemeine Lösung dann gegeben ist durch

$$y(x)=c_1 y_1(x)+\ldots+c_n y_n(x) \quad c_1 \ldots c_n \in \mathbb{R}$$

Diese Lösung wird Fundamentallösung genannt.

lineare & homogene DGL

18.12.24

Mit dem Euler Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ erhalten wir die charakteristische Gleichung, wobei wir n-Nullstellen $\lambda_1 \dots \lambda_n$ erhalten. (Achtung: gewisse können multiplikativität > 1 haben)

Dann ist die Lösung für $y(x)$ gegeben als

$$y(x) = \sum_{i=0}^{r} \left(\sum_{p=0}^{m_i - 1} c_{ip} x^p e^{\lambda_i x} \right)$$

$$+ \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{q=0}^{m_j - 1} \left(A_{jq} x^q e^{a_j x} \sin(b_j x) + B_{jq} x^q e^{a_j x} \cos(b_j x) \right) \right)$$

wobei r die Anzahl reeller Nullstellen mit jeweiliger Multiplizität m_i. s ist die Anzahl komplex-konjugierter Paare welche Nullstellen sind (mit Multiplizität m_j).

$\Rightarrow$ wir brauchen n-Koeffizienten, d.h. auch n-Informationen.

inhomogen DGL

18.12.24

Die Lösung einer inhomogenen DGL ist gegeben als

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

, wobei $y_h(x)$ die Lösung der dazugehörigen homogenen DGL ist und $y_p(x)$ die partikuläre Lösung, welche wir durch einen entsprechenden Ansatz oder der Variation der Konstanten erhalten, Substitution oder Trennung der Variablen erhalten.