ED, Zusammenfassung, Ruben Lenziger FS26

1. Seite: Elektrostatik

Ladung ist Eigenschaft der Materie $[q]=C=As$

Coulomb-Kraft: $\vec{F}_1=-\vec{F}_2=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}{\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|^3}$
wobei die Einheiten der Dielektrizitätskonstante mitenthalten sind. Wert ist experimentell bestimmt.

El-Feld: Ist Kraft pro Ladung für Testkörper
$\vec{E}(x)=\frac{\vec{F}_1(x)}{q}$ z.B. N-Punktladungen $\vec{E}(x)=\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j(\vec{x}-\vec{x}_j)}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{x}-\vec{x}_j\|^3}$

allgemeine Ladungsdichte $\rho(\vec{y})$, $\vec{y}\in\mathbb{R}^n \rightsquigarrow [\rho]=\frac{C}{m^n}$

$\vec{E}(x)=\int dy^3\frac{\rho(y)(\vec{x}-\vec{y})}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{x}-\vec{y}\|^3}$ für Punktladung bei $\vec{x}_0$
gilt $\rho(\vec{x})=q\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0)$, $[\delta^n]=\frac{1}{m^n}$

Feld von Punktlady ist dann gegeben als (bei $x=0$)
$\vec{E}(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}}{\|x\|^3}$, und $\partial_i E_j(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\delta_{ij}\vec{x}^2-3x_ix_j}{\|\vec{x}\|^5}$
↳ gilt nur für $x\neq 0$

Quellen des E-Feldes sind el. Ladungen
Merkmal $\operatorname{div}\vec{E}(x)=0$ für $x\neq 0$ (für Lady bei $x=0$)
↳ erste Maxwellgleichung für freien Raum

Gauss
Fluss des E-Feldes durch geschlossene Fläche ist proportional zur eingeschlossenen Ladung.
$$\oint_{\partial V}dx^2\,\vec{n}\cdot\vec{E}=\int_V dx^3\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\int_V dx^3\frac{\rho}{\varepsilon_0}=\frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

Stokes E-Feld (konstantes Feld)
ist wirbelfrei, d.h. $\operatorname{rot}\vec{E}=\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$

Stokes (3Dim)
Für ein Vektorfeld $\vec{E}$, eine Fläche A mit Rand ∂A gilt: $\int_A dx^2\,\vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\oint_{\partial A}d\vec{x}\,\vec{E}$
↳ Bemerken hier, dass wir also direkt sehen, dass:
$\vec{E}$ konservativ $\Leftrightarrow \operatorname{rot}\vec{E}=0$ und def auf e. zsh.

Stokes allgemein
Bei genügend starken Voraussetzungen gilt
$\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega$ wobei wir diese Gleichung als Basisunabhängiges Skalarprodukt interpretieren können.

Konservative Felder
$\oint_{\partial A}d\vec{x}\,\vec{E}=0 \rightsquigarrow$ konservativ, d.h. Arbeit $\Delta W=-q\int_\gamma d\vec{x}\cdot\vec{E}$ hängt nur von Anf. & Endpunkt ab. Ausserdem $\Delta W[\gamma\gamma^{-1}]=\Delta W[\gamma]-\Delta W[\gamma]=0$
und $\Delta W=q(\Phi(x_2)-\Phi(x_1))$

El-Potential
Die Definition des E-Potentials macht nur Sinn, falls das dazugehörige E-Feld konservativ ist. Dann können wir Φ als eine Art Höhenlinien-Karte interpretieren.
$\rightsquigarrow \vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$, d.h. bis auf konstante Verschiebung von $\vec{E}$ definiert.
$\rightsquigarrow$ typischerweise wählen wir $\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=0$
$\Phi(\vec{x})=\int dy^3\frac{\rho(\vec{y})}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{x}-\vec{y}\|}$
z.B. für Diskrete Ladungen $\Phi(\vec{x})=\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{x}-\vec{x}_i\|}$

Poisson (und Laplace)
Es gilt $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=-\Delta\Phi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ($=0$ für Laplace)
↳ Lösungsansätze dieser DGL werden im Detail studiert.

Energie im E-Feld
Wir ziehen sukzessiv Ladungen von unendlich an die dafür vorgesehene Position und berechnen die dazu nötige Arbeit (unter Annahme, dass die erste Ladung keine Arbeit verrichtete)
Diskret: $W=\sum_{i<j=1}^{N}\frac{q_iq_j}{4\pi\varepsilon_0\|x_i-x_j\|}$
kontinuierlich: $W=\int dx^3dy^3\frac{\rho(x)\rho(y)}{8\pi\varepsilon_0\|x-y\|}=\int dx^3\,\frac{1}{2}\rho(x)\Phi(x)$
$$=-\frac{1}{2}\varepsilon_0\int dx^3\,\Delta\Phi(x)\,\Phi(x)$$
mit Partieller Integration unter Vernachlässigung der Randterme (Annahme $\Phi(R)\sim\frac{1}{R}$) und unter Zuhilfenahme von Gauss können wir
$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int dx^3(\vec{\nabla}\Phi)^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int dx^3\,\vec{E}^2(x)\geq 0$$

Zusammenfassung
- e. Feld konservativ $\Rightarrow \exists$ Potential Φ, $\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi$
- verrichtete Arbeit $\hat{=}$ Potentialdifferenz · Ladung

Lokal (Diff)	Global (Int)
$\operatorname{div}\vec{E}=\vec{\nabla}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\int_V dx^3\,\vec{\nabla}\vec{E}=\int_{\partial V}dx^2\,\vec{n}\vec{E}=\frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$
$\operatorname{rot}\vec{E}=\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$	$\int_A dx^2\,\vec{n}(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\int_{\partial A}d\vec{x}\,\vec{E}$

Gauss'sches Kästchen
Volumenrand um infinitesimal dünnen Oberflächenstück der Fläche A und dicke σ.
$A\cdot\vec{n}(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=A(E_{\perp 1}-E_{\perp 2})=\frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}=\frac{A\sigma}{\varepsilon_0}$
$\Rightarrow$ D.h. $E_\perp$ springt um $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Stokes Schlaufe
Schlaufe mit infinitesimaler Höhe und konservativ E-Feld $\Rightarrow \oint_{\partial A}d\vec{x}\cdot\vec{E}=\vec{L}(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0 \propto E_{\parallel,1}-E_{\parallel,2}$
D.h. $E_{\parallel,1}=E_{\parallel,2}$

Grenzen Identitäten
Spezialfälle des Gauss-Satzes
$\int_V dx^3\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\oint_{\partial V}dx^2\,\vec{n}\cdot\vec{A}$ für spezielle Werte von $\vec{A}$
o) $\vec{A}=\phi\vec{\nabla}\psi \Rightarrow \int_V dx^3(\phi\Delta\psi+\vec{\nabla}\phi\vec{\nabla}\psi)=\oint_{\partial V}dx^2\,\vec{n}(\phi\vec{\nabla}\psi)$
o) $\vec{A}=\phi\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \int_V dx^3(\phi\Delta\psi-\psi\Delta\phi)=\oint_{\partial V}dx^2\,\vec{n}(\phi\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\phi)$

Randwertproblem der Poisson-Gleichung
$\Phi(x)=\int dy^3\frac{\rho(y)}{4\pi\varepsilon_0\|x-y\|}$ ist nicht eindeutig für ein gegebenes $\rho(x)$. Eindeutigkeit folgt aus Randwerten. $V\subset\mathbb{R}^3$ kompakt mit Rand ∂V
$\Delta\Phi(x)=\frac{-\rho(x)}{\varepsilon_0}$ für $x\in V$
$\rho(x)$ sei im Innern von V, nicht aber auf ∂V vorgegeben. Bedingungen von Φ auf ∂V werden Lösung eindeutig machen.
o) Dirichlet-Randbed.: $\Phi(x\in\partial V)=\omega(x\in\partial V)$ bekannt
↳ homogen, falls $\omega(x)=0\ \forall x\in\partial V$
o) Neumann-Randbed.: $E_\perp=-\vec{n}\vec{\nabla}\Phi(x\in\partial V)=v(x\in\partial V)$ bekannt.
↳ $\Phi(x)$ eindeutig bis auf Konstante
↳ homogen, falls $v(x)=0\ \forall x\in\partial V$

Bsp
o) Eh-Leiter $\Rightarrow$ Dirichlet-Randbed mit $\Phi(x\in\partial V)=\text{const.}$
o) Freier Raum $\Rightarrow \Phi(x)\sim\frac{1}{\|x\|}$, $x\to\infty$

Greensche Funktion
Die Diff-Gleichung $D_x\Phi(x)=f(x)$ soll gelöst werden für $x\in V$, wobei D_x ein Diff-Operator ist. (Gesucht ist $\Phi(x)$)
↳ Partikuläre Lösung
Die Greensche Fkt zu D_x ist definiert als $D_xG(x,x')=\delta(x-x')$ (✱)
$D_x\int G(x,x')f(x)dx'=f(x)$
$\Rightarrow \Phi_{part}(x)=\int G(x,x')f(x')dx'$
↳ Homogen
$D_x\Phi_{hom}(x)=0$, durch Randbedingungen bestimmt
Bemerkung: Idee ist inversion von Differentialop., wobei Greensche Funktion mit (✱) gefunden werden. Typischer Beispiele sind Nachzuschlagen.

Poissongleichung mit Greenschen Funktion
Die Greensche Funktion zum Laplace Operator ist definiert durch $\Delta_xG(x,y)=-\delta^3(x-y)$
↳ Beschreibt Potential $\Phi(x)$ einer Einheits-Punktlady bei y. $\rightsquigarrow \Phi(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dy^3\,G(x,y)\rho(y)$
↳ Für den freien Raum gilt also $G(x,y)=\frac{1}{4\pi\|x-y\|}$
↳ $G(x,y)$ ist nicht eindeutig und verschiedene Lösungen G,G' unterscheiden sich wie
$G'(x,y)=G(x,y)+f(x,y)$, wobei $\Delta_xf(x,y)=0$
↳ Diese Eichfreiheit wird durch RB eindeutig.
Man erhält eine zentrale Aussage
$$\Phi(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dy^3G(x,y)\rho(y)-\oint_{\partial V}dy^2\,\vec{n}\vec{\nabla}_yG(x,y)\omega(y)-\oint_{\partial V}dy^2G(x,y)v(y)$$
Dabei müssen die Randbedingungen von $\omega(y),v(y)$ $y\in\partial V$ kompatibel sein.
Bem: In der Elektrostatik für Laplace Operator gilt in der Regel $G(x,y)=G(y,x)$

Dirichlet
Wähle $G(x,y)\overset{\text{immer symmetrisch}}{=}0\ \forall y\in\partial V$, somit fällt die v abhängigkeit in $\Phi(x)$ weg. (wird mit Eichfreiheit $f(x,y)$, $\Delta f=0$ realisiert)
Es folgt
$\Phi(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dy^3G(x,y)\rho(y)-\oint_{\partial V}dy^2\,\vec{n}\,\vec{\nabla}_yG(x,y)\omega(y)$
oft gilt zusätzlich $\omega(y)=0\ \forall y\in\partial V$, d.h. der zweite Teil fällt auch wieder weg.
↳ wir können zeigen, dass somit $\Delta_x\Phi(x)=-\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$
D.h. Poisson Gleichung ist erfüllt und unser Problem beschränkt sich auf ein Randproblem.

Neumann
Bei festlegung von $v(x)=\vec{E}_\perp(x)$ ist das Potential nur bis auf eine Konstante eindeutig. Ausserdem muss wegen Gauss folgende Konsistenz-Bedingung erfüllt sein
$\oint_{\partial V}dy^2\,v(y)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dy^3\rho(y)=\frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$
Wir wählen also $\vec{n}\vec{\nabla}_yG(x,y)=-F(y)$, $\forall y\in\partial V$
d.h. ist unabhängig von x, wobei $\oint_{\partial V}dy^2F(y)=1$
gelten muss (definition von $\Delta_yG(x,y)$ mit Gauss)
$\Phi(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dy^3G(x,y)\rho(y)-\oint_{\partial V}dy^2G(x,y)v(y)+U_0$
Zu zeigen, dass $\Delta\Phi(x)$ ist konsistent, geht aber über
$G(z,x)=G(x,z)+\oint_{\partial V}dy^2F(y)(G(z,y)-G(x,y))$
wobei wir hier bemerken dass $G(z,x)$ i.A. nicht symmetrisch ist.

Spiegelladungen
Idealerweise versteht man Spiegelladungen als physikalischen Interpretation einer mathematischen Manipulation.
Manchmal müssen wir oft $G(x,y)$ manipulieren, s.d. gewisse Bedingungen, wie z.B. erdung eines Leiters, oder $E_\perp=0$ an einem Leiter erfüllt ist. Dies geht mit Spiegelladungen, welche als imaginäre Ladungen an geeignet platzierten Punkten sind, verstanden werden können.

Bsp Halbebene
- Dirichlet: $G(x,y)=0\ \forall y\in\partial H$, $G(x,y)=\frac{1}{4\pi\|x-y\|}-\frac{1}{4\pi\|x-y'\|}$
wobei $y'=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\-y_3\end{pmatrix}$
$\Rightarrow \Phi(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\|x-y\|}-\frac{1}{\|x-y'\|}\right)$
- Neumann: $\vec{n}\vec{\nabla}\Phi(x)=0\quad\forall x\in\partial H$
$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi\|x-y\|}+\frac{1}{4\pi\|x-y'\|}$$
Bemerkung, dass dies eine grundlegend andere Situation ist, wie für Dirichlet RB, deshalb auch unterschiedliche Resultate plausibel sind.

Bsp Kugeloberfläche
- Dirichlet: $G(x,y)=0$, $y\in\partial V$

$G(x,y)=\frac{1}{4\pi\|x-y\|}-\frac{\alpha}{4\pi\|x-y'\|}$
Inversion der Sphäre $\vec{y}'=\frac{R^2\vec{y}}{\|y\|^2}$, $\alpha=\frac{R}{\|y\|}$
$\Rightarrow \Phi(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\|x-y\|}-\frac{R}{\|y\|\|x-y'\|}+\frac{R}{\|y\|\|x\|}\right]$

Kapazitätskoeffizienten (Unwichtig?)

RB: $\Phi(x)=\sum_{i=1}^{N}U_i\Gamma_i(x)$, $\Gamma_i(x)=\delta_{ij}\ \forall x\in\partial L_j$
$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_L dx^3(\vec{\nabla}\Phi)^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\sum_{i,j=1}^{N}U_iU_j\int_L dx^3\,\vec{\nabla}\Gamma_i(x)\vec{\nabla}\Gamma_j(x)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}U_iU_jC_{ij}$$
wegen $\Delta\Phi=0$ auf L, da wir im Ladungsfreien Raum sind nun ma Alternativ schreiben
$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_L dx^3\,\vec{\nabla}(\Phi\vec{\nabla}\Phi)=-\frac{1}{2}\varepsilon_0\sum_{i=1}^{N}\oint_{\partial L_i}dx^2\,\Phi(x)\vec{n}\nabla\Phi(x)$$
$$=-\frac{1}{2}\varepsilon_0\sum_{i=1}^{N}U_i\oint_{\partial L_i}dx^2\,\vec{n}\nabla\Phi(x)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}U_iQ_i$$
wobei Q_i die auf ∂L_i induzierte Ladungen sind
$Q_i=\sum_{j=1}^{N}C_{ij}U_j$

Bemerk: $W\geq 0$ wegen Quadrat
$W=0 \Leftrightarrow U_i=0\ \forall i$

Konforme Symmetrien
Elektrostatik ist Translations und Rotationsinvariant. Andere weniger offensichtliche Symmetrien sind konforme – Transformationen, also solche die Winkel (aber nicht zwingend Distanzen) invariant lassen.
z.B.: Inversion an der Sphäre $\vec{x}'=\frac{R^2}{\|\vec{x}\|^2}\vec{x}$
gibt $\Phi(x)=\frac{R}{\|x\|}\Phi(x')$, $\rho'(x)=\frac{R^3}{\|x\|^5}\rho(x')$
$\Rightarrow \Delta_x\Phi'(x)=-\frac{\rho'(x)}{\varepsilon_0}$ ✓
Allgemein sind konforme Symmetrien die Möbiusser Gruppe zusammen mit Inversionen, und somit wird Geraden und Sphären auf Geraden und Sphären abgebildet.
Bem: Wenn wir $\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}$ identifizieren, können wir der Riemann abbildungssatz verwenden.

Kugelflächenfunktionen #1
Idee: Basisfunktion so finden, dass Symmetrie ausgenutzt werden können.
Bem: Mathematisch bedeutet Symmetrie, dass wir Variablen trennen können. $\rightsquigarrow$ EWP

Kugelkoordinaten
$x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$
$$\Delta_{kugel}=\underbrace{(\partial_r)^2+\frac{2}{r}\partial_r}_{\text{radialteil}}+\underbrace{\frac{1}{r^2}\left((\partial_\theta)^2+\frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}(\partial_\varphi)^2\right)}_{-\frac{L^2}{r^2}\ \text{sphärischer Teil}}$$
$\int_{\mathbb{R}^3}dx^3=\int_0^\infty dr\,r^2\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi=\int_0^\infty dr\,r^2\oint d^2\Omega$
wir definieren $L_z=-i\partial_\varphi$, $[L^2,L_z]=0$
D.h. L^2 und L_z haben gleiche Eigenfkt.

Legendre Polynome
Rodrigues Formel: $P_\ell(u)=\frac{1}{2^\ell\ell!}\left(\frac{d}{du}\right)^\ell(u^2-1)^\ell$
Es gilt $\int_{-1}^{1}u^nP_\ell(u)du=0\quad\forall 0\leq n<\ell$
$P_\ell^m(u)=\frac{(-1)^m}{2^\ell\ell!}(1-u^2)^{m/2}\left(\frac{d}{du}\right)^{\ell+m}(u^2-1)^\ell$

Kugelfunktion #2
Wir separieren die Variablen. Für den sphärischen Teil finden wir als Lösung für das EW-Problem für Laplace-Gleichung
$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=\sqrt{(2\ell+1)\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$
erfüllen EW-GL $\vec{L}^2Y_{\ell m}=\ell(\ell+1)Y_{\ell m}$, $L_zY_{\ell m}=mY_{\ell m}$
Dabei gilt $\ell\in\mathbb{N}$, $m\in\{-\ell,\dots,\ell\}$
$Y_{\ell m}$ sind für ℓ,m Vollständige Basis von $L^2(S^2)$
D.h. $F\in L^2(S^2)\Rightarrow F(\theta,\varphi)=\sum_{\ell,m}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)f_{\ell m}$
Kugelflächenfkt sind somit auf S^2 analog zu e^{imx} auf S^1. Ähnlich Basen für S^n $n\geq 3$
- Orthogonal: $\int_{S^2}Y_{\ell m}Y^*_{\ell'm'}=\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$
- Vollständig: $\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')=\frac{4\pi}{\sin\theta}\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')$

Multipolentwicklung
Idee: Potential als konvergente Reihe von sogenannten Multipolmomenten zu schreiben. (Ähnlich wie Taylor oder Fourier)
Setup: $\rho(r\geq R)=0$, $\Phi(x\to\infty)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\|x\|}+O(\frac{1}{r^2})$
In Kugelkoordinaten sei $\Phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{\ell,m}\Phi_{\ell m}(r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$
wir finden als Lösung der Poisson Gleichung
$\Phi_{\ell m}(r)=r^\alpha$, $\alpha=-\ell-1$ und schreiben
$$\Phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{\ell m}\frac{Q_{\ell m}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(2\ell-1)r^{\ell-1}}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$
wobei $Q_{\ell m}$ die sphärischen Multipolmomente sind
$$Q_{\ell m}:=\int d\Omega\,dr\,r^{2+\ell}Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)\rho(r,\theta,\varphi)$$

Kartesischen Koordinaten
$\Phi(x)=\int dy^3\frac{\rho(y)}{4\pi\varepsilon_0\|x-y\|}$ wie gehabt.
Wir Taylorentwickeln $\frac{1}{\|x-y\|}$ für $x\to\infty$ als
$$\frac{1}{\|x-y\|}=\frac{1}{\|x\|}+\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|x\|^3}+\frac{3(\vec{x}\cdot\vec{y})^2-\vec{x}^2\vec{y}^2}{2\|x\|^5}+\dots$$
Somit gilt
$$\Phi(x)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\|x\|}+\frac{\vec{x}\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0\|x\|^3}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{x_ix_jR_{ij}}{4\pi\varepsilon_0\|x\|^5}+\dots$$
wobei die Multipole gegeben sind durch
$Q=\int dx^3\rho(x)$ Monopol $\ell=0$
$\vec{P}=\int dx^3\rho(x)\vec{x}$ Dipol $\ell=1$
$R_{ij}=\int dx^3\rho(x)(3x_ix_j-\delta_{ij}\vec{x}^2)$ Quadrupol $\ell=2$
Bemerk, dass wir für jedes ℓ genau $2\ell+1$ Freiheitsgrade haben, es besteht ein Zusammenhang zwischen Kugelflächenfkt und Multipolmomenten.

Darstellung von SO(3) (exkurs)
Für Mathematischen Hintergrund siehe MMP II.
Sei D_1 fundamentale Darstellung von SO(3)
$D_1\otimes D_1$ ist 9-dimensional.
Betrachten wir Permutationsoperator,
$PD(v_1\otimes v_2)=P(D_1v_1\otimes D_1v_2)=D_1v_2\otimes D_1v_1$
$=DP(v_1\otimes v_2)$
Der mit Darstellung kommutiert
wir definieren Projektoren $\Pi_\pm=\frac{1}{2}(I\pm P)$
kommutieren mit D, weshalb
$D=D_+\oplus D_-$ wobei D_+ sym und D_- antisym ist. $D_\pm=D\Pi_\pm$
D_- ist äquivalent zu $D_1\Rightarrow \dim D_-=3$
$D_+=D_0\oplus D_2$, wobei D_0 trivial ist und $\dim D_2=5$
$\Rightarrow D_1\otimes D_1\cong D_1\oplus D_0\oplus D_2$
$D_2\otimes D_1\cong D_2\oplus D_1\oplus D_3$
$\Rightarrow D_\ell\otimes D_1\cong D_\ell\oplus D_{\ell-1}\oplus D_{\ell+1}$, $\dim D_\ell=2\ell+1$
$$Y_{\ell m}(\theta',\varphi')=\sum_{m'=-\ell}^{\ell}D_\ell(R)_{mm'}Y_{\ell m'}(\theta,\varphi)$$
wobei $R:(\theta,\varphi)\mapsto(\theta',\varphi')$

Voraussetzungen

In der Magnetostatik betrachten wir statische Ströme, d.h. zeitunabhängige Systeme.
Wir werden einige Analogien zur Elektrostatik benennen. Insbesondere hilft es, zu wissen, dass die Magnetostatik durch Bezugssystemwechsel in das der bewegten Ladungen als Erweiterung der Elektrostatik interpretiert werden kann.

Bemerkung

Der Aufbau dieser Zst. folgt nicht der Struktur aus der Vorlesg. Konzeptionell → Methodisch.

Stromdichte

Strom durch Fläche A sei $I_A = \int_A dx^2\, \vec{n}\cdot\vec{j}(x)$
Somit gilt für die Stromdichte $[\vec{j}] = \frac{A}{m^2}$
Und in der Magneto-/Elektrostatik die 'statische' Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$

Amperesches Gesetz (Analogon zu Coulomb)

$$\vec{F} = \mu_0 I_1 I_2 \oint_{\ell_1}\oint_{\ell_2} \frac{d\vec{x}_1\times(d\vec{x}_2\times(\vec{x}_1-\vec{x}_2))}{4\pi\|x_1-x_2\|^3} = \mu_0\int dx^3\int dy^3\, \frac{\vec{j}(x)\times\vec{j}(y)\times(\vec{x}-\vec{y})}{4\pi\|x-y\|^3}$$

beschreibt die Kraft zweier Stromdurchflossener Leiter ℓ_1,ℓ_2 mit I_1, I_2.
$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{kg\,m}{A^2 s^2}$ (exakt) ist die magnetische Feldkonstante. Es gilt $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

Bem: $I_1\uparrow$ $\uparrow I_2$ ziehen sich an, $I_1\uparrow$ $\downarrow I_2$ stossen ab

Magnetische Flussdichte / Magnetfeld

Vektorfeld, welches Kraft auf infinitesimale Stromschleife wirkt, $[B] = T = \frac{N}{Am} = \frac{kg}{As^2}$

Biot-Savart

Abgeleitet vom Ampèreschen Gesetz.

$$\vec{B}(x) = \mu_0 I\oint_\ell \frac{d\vec{y}\times(\vec{x}-\vec{y})}{4\pi\|x-y\|^3} = \mu_0\int dy^3\, \frac{\vec{j}(y)\times(\vec{x}-\vec{y})}{4\pi\|x-y\|^3}$$

D.h. die Kraft auf eine Stromschleife ist

$$\vec{F} = I\oint_\ell d\vec{x}\times\vec{B}(x) = \int dx^3\, \vec{j}(x)\times\vec{B}(x)$$

Bsp

1) unendlich langer Draht entlang z-Achse
$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_{tangential}$ ⇝ beachte RHR
D.h. Kraft pro Länge ℓ auf einen zweiten Leiter $\tilde{I}$ im Abstand r ist $\frac{F}{\ell} = \tilde{I}B = \frac{\mu_0 I\tilde{I}}{2\pi r}$
2) Spule mit N Windungen pro ℓ
$\vec{j} = \frac{I\cdot N}{\ell}\delta(r-R)\vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 N\cdot I}{\ell}\vec{e}_z$

Drehmoment

Aufgrund der Aussagen von Leiterschleifen und der infinitesimalen Kraft $d\vec{F} = I\,d\vec{x}\times\vec{B}(x)$ müssen wir Drehmoment (i.a. relevant für homogene Felder) beachten.

$$\vec{M} = \oint_\ell \vec{x}\times(d\vec{x}\times\vec{B}(x)) = \int dx^3\, \vec{x}\times(\vec{j}(x)\times\vec{B}(x))$$

Feldgleichungen

Es gilt $\nabla_i B_j = \mu_0\sum_{n,\ell=1}^{3}\varepsilon_{jn\ell}\int dy^3\, j_n(y)\,\frac{\delta_{i\ell}(x-y)-3(x-y)_i(x-y)_\ell}{4\pi\|x-y\|^5}$
Daraus folgt direkt, dass $\vec{B}$ quellfrei ist
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \int_V dx^3\,\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \oint_{\partial V} dx^2\,\vec{n}\cdot\vec{B} = 0$
Es gibt also keine magnetischen Monopole
$(\vec{\nabla}\times\vec{B})_i = \mu_0\int dy^3\,\vec{j}(y)\cdot\vec{\nabla}_y\frac{(x-y)_i}{4\pi\|x-y\|^3}$
Es folgt $\vec{j}(y)=0 \Rightarrow \mathrm{rot}\,B = 0$, dies ist Analog zu $\rho(x)=0 \Rightarrow \mathrm{div}\,E=0$
Bei $j(y)\neq 0$ folgt $\mathrm{rot}\,B = \mu_0\vec{j}$ (Herleitung?)

Amperesches Durchflutungsgesetz

Aus $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ folgt $\mu_0\int dx^2\,\vec{n}\cdot\vec{j}(x) = \int dx^2\,\vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0 I$

Vektorpotential

Da $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ können wir $\vec{B} =: \vec{\nabla}\times\vec{A}$ das Vektorpotential definieren. Aus Biot-Savart folgt
$\vec{B} = \mu_0\int dy^3\,\vec{\nabla}_x\times\frac{\vec{j}(y)}{4\pi\|x-y\|} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \Rightarrow \vec{A} = \mu_0\int dy^3\,\frac{j(y)}{4\pi\|x-y\|}$
Wir sehen, dass wir Eichfreiheit haben
$\vec{A}'(x) = \vec{A}(x) + \vec{\nabla}\Lambda(x)$, da $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0$, auf nicht e.zsh. Gebieten haben wir noch weitere Eichfreiht. (nicht wir relevant)
Meistens nutzen wir Coulomb Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ oder axiale Eichung $\vec{n}\cdot\vec{A}=0$, für Achse $\vec{n}$
Für Coulomb-Eichung folgt
$\Delta\vec{A}(x) = -\mu_0\vec{j}(x)$, da $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta$
Für im endlichen verschwindende $\vec{j}$ und gültigkeit der Kontinuitätsgleichung gilt $\vec{\nabla}\vec{A}=0$

Feldenergie

Die Arbeit, um eine Stromdichte zu erzeugen kann berechnet werden durch
$\Delta W = \frac{1}{2}\int dx^3\int dy^3\,\mu_0\,\frac{\vec{j}(x)\,\vec{j}(y)}{4\pi\|x-y\|} = \frac{1}{2\mu_0}\int dx^3\,\vec{B}^2(x) \geq 0$

Magnetisches Moment / Multipolentwicklung

Ähnlich zur Elektrostatik können wir
$\vec{A} = \mu_0\int dy^3\,\frac{\vec{j}(y)}{4\pi\|x-y\|} = \mu_0\int dy^3\,\vec{j}(y)\left[\frac{1}{4\pi\|x\|} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{4\pi\|x\|^3} + \dots\right]$
schreiben. Wir sehen wegen der Kontinuitätsgleichung
$0 = x_n\oint_{\partial V} dx^2\,\vec{n}\,\vec{j}(x) = \int_V dx^3\,(x_n\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(x) + j_n) = \int_V dx^3\,j_n = 0$
D.h. wir haben keine mag. Monopole.
Analog hier wir $0 = \int_V dx^3\, j_\ell x_n$
D.h. mit $\vec{m} := \frac{1}{2}\int dx^3\,\vec{x}\times\vec{j}(x)$, dem mag. Dipolmoment finden wir $\vec{A} = \mu_0\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{4\pi\|x\|^3} + \dots$

Kraft & Drehmoment

Mit Taylorexpansion von $\vec{B}$ am Ursprung finden wir $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}\vec{B})$, $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$ und $W = -\vec{m}\cdot\vec{B}$.
Bemerke, dass die Beziehung von $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$ konsistent ist.

Bemerkung

In der Vorlesung werden über mikroskopischen vs. makroskopischen Felder gesprochen. Ich sehe zur Anwendung keine Notwendigkeit diese Unterscheidung zu machen.

Mikroskopisch: Wahre Felder, Mikrobeschreibung Maxwell gleichungen

Makroskopisch: gemittelt's mikroskopisches Feld

Dielektrikum

Ein Dielektrikum ist eine Art von Materie, für die bei einem externen el. Feld Dipole durch Influenz entstehen. Wir unterscheiden zwischen

- ρ_{Dipol} Ladungsdichte, die auf Dipol-Eigenschaft zurückzuführen ist.
- $\rho_{frei} = \rho$ Ladungsdichte von freien Ladungsträgern

Wir definieren $\rho_{ges} = \rho_{frei} + \rho_{Dipol}$

Die Dipoldichte ist dann $\vec{P}$ s.d. $\rho_{Dipol} = -\vec{\nabla}\vec{P}$

Wir stellen fest, dass $\vec{P}$ hinreichend genau dem äusseren E-Feld folgt, d.h.

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} + O(E^2) \approx \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

wobei χ eine einheitslose Grösse ist, die vom Material abhängt, bzw dieses beschreibt. Beachte, dass $\chi \in \mathbb{R}$ für Isotrope, $\chi \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ für anisotrope Materialien.

Dielektrische Verschiebung

Hilfsfeld, welches definiert ist durch

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \text{es gilt } \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{frei} \quad \begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{ges}}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\rho_{Dipol} \end{cases}$$

Die Maxwell-ähnlichen-Gleichungen sind damit

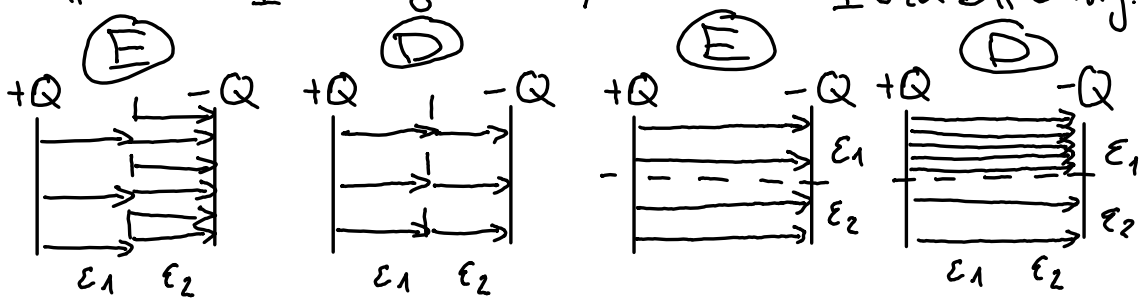
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{frei}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

Wir schreiben auch $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$

wobei $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_r$, $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ elektrische Materialkonstanten sind.

Materialgrenzen von $\varepsilon_1 = 1 < \varepsilon_2$

Mithilfe von Gaussschen-Kästchen und Stokesschen-Schleife sehen wir leicht, dass bei Übergang von Medien unterschiedlicher Dielektrizitäten $E_\parallel$ und $D_\perp$ stetig sind, während $E_\perp$ und $D_\parallel$ unstetig.



Magnetostatik in Materie

Analog zu vorhin definieren wir

$\vec{M}$:= Magnetisierung $\longleftrightarrow \vec{P}$

$\vec{H}$:= Magnetfeld $\longleftrightarrow \vec{D}$

$\vec{B}$:= Magnetische Flussdichte $\longleftrightarrow \vec{E}$

Das Magnetfeld $\vec{H}$ wird von $\vec{j}_{frei}$ generiert

Es gilt $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H} \Leftrightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

wobei $\mu = \mu_0 \mu_r$, $\mu_r = 1 + \chi_m$ die magnetischen Materialkonstanten sind.

Die Feldgleichungen lauten dann

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}_{frei}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

bzw in integraler Form

$$\oint_{\partial A} d\vec{x}\cdot\vec{H} = I_{frei,A}, \quad \oint_{\partial V} dx^2\, \vec{n}\cdot\vec{B} = 0$$

Allgemeine Kraftdichte

$\vec{f}(x) = \rho(x)\vec{E}(x) + \vec{j}(x) \times \vec{B}(x)$

und die Kraft ist dann

$\vec{F}(x) = \int dx^3 \vec{f}(x)$, für ruhende Systeme $\vec{F} = q\vec{E}$

Ladungs- & Stromdichte für bewegte Partikeln

Sei Ladung q bei $t=0$ am Ort y und bewegt sich mit v. Dann gilt

$\rho(x) = q\,\delta^3(x-y-vt)$

$\vec{j}(x) = q\,\vec{v}\,\delta^3(x-y-vt)$ $\rightsquigarrow$ Nichtlinear

Lorenzkraft

Die Kraft auf ein bewegtes Punktteilchen im EM-Feld ist $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Dynamische Kontinuitätsgleichung

$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(x) = q\vec{v}\,\vec{\nabla}\delta^3(x-y-vt) \neq 0$, sondern $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(x) = -\partial_t \rho$

Beweise, dass dies intuitiv Sinn macht, mit der Betrachtung von Ladungserhaltung.

Faradayschen Induktionsgesetz

Eine zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife induziert eine Spannung.

$U_{ind} = -\dot{\Phi}_B = -\frac{d}{dt}\int_A dx^2\,\vec{n}\cdot\vec{B}$

Bem: Der magnetische Fluss kann durch eine Änderung von B, A oder den Winkel $\vec{n}\cdot\vec{B}$ geändert werden.

Bem: nach dem Lenz'schen Gesetz geht der induzierte Strom genau so, dass das vom Strom erzeugte $\vec{B}$-Feld der Änderung des Flusses entgegenwirkt.

Differentielle Form

Das Faradayschen Induktionsgesetz in differentieller Form ist $\vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0$, wobei die Herleitung nicht komplett nachvollzogen wurde.

Maxwell'schen Verschiebungsstrom

Wir sehen, dass $0 = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0\vec{\nabla}\vec{j} = -\mu_0\partial_t\rho$

Diese Inhomogenität korrigieren wir mit

$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E} = \mu_0\vec{j}$

Wir sehen leicht, dass unter Anwendung von $\vec{\nabla}\cdot$ die dynamische Kontinuitätsgleichung folgt.

Vollständige Maxwellgleichungen

homogen

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, $\oint_{\partial V} dx^2\,\vec{n}\cdot\vec{B} = 0$ keine Monopole

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$, $\frac{d}{dt}\int_A dx^2\,\vec{n}\vec{B} = -\oint_{\partial A} d\vec{x}\,(\vec{E} + \dot{\vec{x}}\times\vec{B})$, Induktion

inhomogen

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\oint_{\partial V} dx^2\,\vec{n}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dx^3\rho$, Gaussches Gesetz

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E} + \mu_0\vec{j}$, $\frac{d}{dt}\int_A dx^2\,\vec{n}\vec{E} = \oint_{\partial A} d\vec{x}\left(\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\vec{B} - \dot{\vec{x}}\times\vec{E}\right) - \frac{1}{\varepsilon_0}\int_A dx^2\,\vec{n}(\vec{j} - \dot{\vec{x}}\rho)$

$\rightsquigarrow$ erweitertes Durchflutungsgesetz (Ampere)

Motivation

In diesem Abschnitt möchten wir Symmetrien für die Maxwellgleichung und die daraus folgenden Kontinuitätsgleichung finden. Gemäss Noether gehört zudem auch zu jeder Symmetrie eine Erhaltungsgrösse (wie z.B. Ladung, Energie, Impuls oder Drehimpuls) während wir in der klassischen Mechanik oft Raum und Zeitsymmetrie separat betrachten, werden wir sehen, dass die Maximale Symmetrie Raum und Zeit koppelt, was schliesslich zur SRT führt.

Ladungserhaltung

Kontinuitätsgleichung ist geg als $\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ folgt zusammen mit $Q_V := \int_V dx^3 \rho$ und

$$\dot{Q}_V = \int_V dx^3 \partial_t \rho = -\int_V dx^3 \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\oint_{\partial V} dx^2 \vec{n}\cdot\vec{J} =: -I_{\partial V}$$

D.h. Änderung der Ladung in V ist Stromfluss durch die Oberfläche. Null falls Rand unbegrenzt.

Energieerhaltung

Energiedichte ist $w(x) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$

und $\partial_t w = -\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \vec{E}\cdot\vec{J}$

was eine weitere Kontinuitätsgleichung ergibt, welche im Folgenden Satz formuliert ist

Satz von Poynting

$$\partial_t w + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{E}\vec{J}, \quad \vec{S} := \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

wobei $\vec{S}$ der Poynting Vektor ist und die Energieflussdichte beschreibt

Bem

Der $\vec{E}\cdot\vec{J}$ Term beschreibt die Leistung, die das Feld an existierender Stromdichte verrichtet. Dies ist konsistent mit der Kraftdichte auf Ladungs- und Stromverteilung $\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}$, mit $\vec{J} = \vec{v}\rho$ folgt $\vec{f}\vec{v} = \vec{J}\cdot\vec{E}$

Makroskopisch

Mit Integrationsbereich V ergibt sich also

$$\dot{W}_V + S_{\partial V} + P_{mech,V} = 0, \quad \text{wobei}$$

$$W_V := \int_V dx^3 w(x), \quad S_{\partial V} := \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n}\cdot\vec{S}, \quad P_{mech,V} := \int_V dx^3 \vec{J}\cdot\vec{E}$$

D.h. Änderung der Feldenergie W ist gegeben durch Energiefluss durch Oberfläche $S_{\partial V}$ und mechanische Leistung $P_{mech,V}$ auf Strom/Ladung.

Bem: Für freies Feld in ganz $\mathbb{R}^3$ gilt $\dot{W} = 0$

Impuls

Der Impuls wird indirekt folgendermassen def: Zeitliche Ableitung des Impulses ist EM-Kraft.

Mit der Impulsdichte $\vec{\pi}$, Kraftdichte $\vec{f}$ und einem Divergenztensor T, der intuitiv mit räumlicher Verschiebung von EM-Stromdichte erklärt werden kann, gilt

$$\dot{\vec{\pi}} + \vec{f} = \vec{\nabla}\cdot T, \quad \text{es gilt } (\vec{\nabla}\cdot T)_i = (\partial_x T_{i1} + \partial_y T_{i2} + \partial_z T_{i3})$$

Für ein Volumen gilt also $\partial_t \vec{P}_V + \vec{F}_V = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n}\cdot T$

Rechnungen zeigen

$$\vec{f} = -\partial_t(\varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B}) - \varepsilon_0\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \varepsilon_0(\vec{\nabla}\vec{E})\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{B}$$

und $\vec{\pi} = \varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\vec{S}$ und wir finden

$$T_{ij} = \varepsilon_0\left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{E}^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{B}^2\right)$$

Bem: Wir nennen T den Maxwellschen-Spannungstensor

Symmetrien

Erhaltungsgrösse	Symmetrie
Energie	Zeittranslation
Impuls	Ortstranslation
Drehimpuls	Rotation
Schwerpunktbewegung	Bezugssystemtrafo
el. Ladung	Eichtransformation

wobei Drehimpuls $\vec{L} := \int dx^3 \vec{x}\times\vec{\pi}$

und Energieschwerpunkt $\vec{G} := \int dx^3 w\vec{x}$

Es folgt, dass $\vec{G} - c^2 t\vec{P}$ ist erhalten

Galileitransformationen

Im Allg. sind EM-Felder und damit die Maxwellgleichungen nicht Galileiinvariant.

- 0) E-Felder sind abhängig von Beobachter
- 0) Kraft muss Inertial-sys-unabhängig sein.

Wir sehen $\vec{v}' = \vec{v}$, $\frac{d}{dt}f'(x',t) = \frac{\partial}{\partial t}f(x,t) + \vec{v}\vec{\nabla}f(x,t)$

Daraus folgt $\vec{E}'(\vec{x}',t) = \vec{E}(\vec{x},t) + \vec{v}\times\vec{B}(\vec{x},t)$

und überraschenderweise $\vec{B}'(\vec{x}',t) = \vec{B}(\vec{x},t)$

Es folgt, dass

1) Homogene Maxwellgleichung sind Galileiinvariant
2) Inhomogene Maxwellgleichungen nicht.

Bem: Da die Abweichungen den Vorfaktor $\frac{1}{c^2}$ haben, sind für kleine Geschwindigkeiten Galilei-Trafo annähernd physikalisch. Lorenz-Trafo erhalten.

Idee

Wir haben gesehen, dass die Maxwell-Gleichungen nicht Galilei-Invariant sind. Es braucht also eine andere Sprache, die den Bezugssystemwechsel korrekt beschreibt.

Wellengleichung

Mit $x_0 := ct$ lässt sich die Wellengleichung formulieren als $\sum_{\mu=0}^{3} \eta^{\mu\mu} \partial_{x_\mu}^2 \Psi(x) = 0$

wobei $\eta = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ist

Lorentz-Transformation

Der D'alembert Operator muss invariant bleiben. D.h. $\Box' = \Box = \sum_{\mu=0}^{3} \eta^{\mu\mu} \partial_{x_\mu}^2$

Mit $x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu$ sollte also gelten $\partial x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\nu{}_\mu \partial x^\nu$

Woraus folgt, dass wegen $\Box' = \Box$ gilt

$\Lambda \eta \Lambda^T = \eta$ oder $\sum_{\rho,\sigma=0}^{3} \eta^{\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta^{\mu\nu}$

Lorentz-Boosts

Zusätzlich zu den Rotation im Raum haben wir hiermit 3 zusätzliche dof die von $\vec{v}$ festgelegt werden. mit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \vec{v}^T/c \\ \gamma \vec{v}/c & 1 + \gamma^2 \vec{v}\vec{v}^T/c^2(1+\gamma) \end{pmatrix}$$

Daraus folgen die Transformationen

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v}\vec{x}, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \gamma \vec{v} t + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{v}\cdot\vec{x}) \vec{v}$$

Bem: für $v \ll c$, $\gamma \to 1$, weshalb SRT-Effekte im Alltag nicht zu sehen sind und unintuitiv wirken.

Bem $\Lambda(\vec{n} v_1)\Lambda(\vec{n} v_2) = \Lambda(\vec{n} v_3)$ mit

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \rightsquigarrow \text{nichtlineare Addition}$$

Bem Zwei Lorentz-Boost mit verschiedenen Richtungen lassen sich als Rotation und Lorentz-Boost schreiben.

Bem Lorentz-Gruppe lässt $SO(3,1)$ zusammen mit Translationen in Raum-Zeit bilden sie Poincaré-Gruppe

Es gibt zusätzlich Spiegelungen in Raum-Zeit.

Lorentz-Transformierte ED

$$\vec{E}' = \gamma \vec{E} + \gamma \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{E}\cdot\vec{v})\cdot\vec{v}$$

$$\vec{B}' = \gamma \vec{B} - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{B}\cdot\vec{v})\cdot\vec{v}$$

$$\rho' = \gamma \rho - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v}\vec{j}$$

$$\vec{j}' = \vec{j} - \gamma \rho \vec{v} + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{j}\cdot\vec{v}) \vec{v}$$

Für $v \ll c$, $\gamma \to 1$ sind das einfach Galilei-Transformationen.

Tensoren

Bem: Für Tensoren gibt es viele äquivalente, und gleichermassen unintuitive Interpretationen. Es scheint, als müsse man nicht verstehen, was ein Tensor ist, sondern es gilt mit den Umgang geläufig zu werden.

Kontravariant

Ein vierer Vektor A^μ (mit Index oben) heisst kontravariant, falls er ähnlich wie x^μ, also mit $A'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu A^\nu$ transformiert.

z.B. $x^\mu, p^\mu, u^\mu, A^\mu$

Intuition: Wenn wir Koordinaten um Faktor 2 strecken, ist der gleiche Vektor in den neuen Koordinaten komponentenweise halbiert.

"kontra $\leftrightarrow \frac{1}{\alpha}$"

Kovariant

Ein Vektor B_μ (Index unten) heisst kovariant, falls er mit $B'_\mu = B_\nu \Lambda^\nu{}_\mu$ transformiert.

z.B. Ableitungen, k_μ Wellenvektor

Intuition: Wenn wir Koordinatenraster vergrössern, werden Distanzen zwischen festen Objekten kleiner, weshalb Steigungen grösser werden. "ko $\leftrightarrow \alpha$"

Bem Kontraktion eines kovarianten und kontravarianten Vektor ist Lorentz-invariant (Skalar)

Bem Wenn wir kontravariante Vektoren mit $V \ni A$ identifizieren, können wir kovariante mit $V^{Dual} \ni B$ identifizieren. D.h. $BA \in K = \mathbb{C}/\mathbb{R}$, da Elemente vom Dualraum invertieren sind.

Bem mit $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ lassen sich kontravariante Vektoren in kovariante wandeln. mit $\eta^{\mu\nu} = \eta^{-1}{}_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ genau umgekehrt. D.h.

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad B^\mu = \eta^{\mu\nu} B_\nu$$

Daraus folgt, dass in der SRT ko-/kontravariante Vektoren keine grosse Rolle spielen

Ableitungen

Wie bereits erwähnt transformieren Ableitungen kovariant $\partial'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial_\nu$

Dies folgt direkt aus $\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial_\nu$

Kreuzprodukt

Es gilt $(\vec{A} \times \vec{B})_k = \varepsilon_{ijk} A_i B_j$, wir definieren

$$(A^\times)_{ij} = -\varepsilon_{ijk} A_k = \begin{vmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{vmatrix}$$

Es gilt somit $(\vec{A} \times \vec{B})^T = \vec{A}^T B^\times$ bzw

$$A_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (A^\times)_{ij}$$

ED mit Tensoren

Wir schreiben $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$ als

$\partial_j B^\times_{jk} - \frac{1}{c^2} \partial_t E_k = \mu_0 j_k$, ausserdem

$\frac{1}{c} \partial_j E_j = \mu_0 c \rho$. Wir definieren den Tensor $F_{\mu\nu}$ als sogenannten Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \vec{E}^T \\ -c^{-1} \vec{E} & B^\times \end{pmatrix}$$

Analog definieren wir die Wirbel-Stromdichte

$$j_\mu := \begin{pmatrix} -c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

Daraus lassen sich die beiden inhomogenen Maxwell Gleichungen schreiben als

$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\rho} = \mu_0 j_\rho$, wobei $\partial_0 := \frac{1}{c} \partial_t$

Bem So sind die Maxwell-Gleichungen Lorentz-invariant. Yuhu!

Bem Aus der Antisymmetrie von $F_{\mu\nu}$ folgt die Kontinuitätsgleichung.

$$0 = \partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = -\partial^\mu \partial^\nu F_{\nu\mu} = \mu_0 \left(-\frac{1}{c} \partial_t(-c\rho) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\right)$$

Homogene Maxwell-Gleichungen

Die Homogenen Maxwell-Gleichungen lassen sich schreiben als $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$

oder mit dem dualen Feldstärketensor

$$\tilde{F} := \begin{pmatrix} 0 & -\vec{B}^T \\ \vec{B} & \frac{1}{c} E^\times \end{pmatrix} \text{ als } \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$$

Es gilt $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$, $\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$

Erhaltungsgrössen

Der Symmetrische Energie-Impuls Tensor ist

$$T_{ij} := \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2\right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{B}^2\right)$$

$$T_{0i} := \frac{1}{\mu_0 c} \varepsilon_{ijk} E_j B_k = \frac{1}{c} S_i$$

$$T_{00} := -w = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

bzw wie Feldstärketensoren

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho + \frac{1}{4\mu_0} \eta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

Potentiale

Definiere $A_\mu := (-\frac{1}{c}\Phi, \vec{A})$, $F_{\mu\nu} = -\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu$

Bem: Die Eichinvarianz lässt $F_{\mu\nu}$ invariant.

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen sind

$$\mu_0 j_\nu = -\Box A_\nu + \partial_\nu(\partial^\mu A_\mu)$$

und es gilt die Wellengleichung

$$\Box A_\mu = -\mu_0 j_\mu$$

Bem Es gibt noch Formulierung mit Differentialformen, wobei homogene Maxwell zu $dF = 0$ und inhomogen zu $d*F = \mu_0 j$ werden.

Geladene Teilchen

Um ein Teilchen kosistent zu beschreiben, verlangt man eine Parametrisierung für ein Pfad in der Raumzeit. $x_\mu(\sigma)$

$\sigma = t$ ist ungünstig, da t bezugssystemabhängig ist. Die Eigenzeit τ (Zeit im Ruhesystem des Teilchens) eignet sich gut. es gilt $x'(\tau)^2 = -c^2$

Viererimpuls

Unabhängig von der Parametrisierung ist def

$p^\mu := mc \frac{x'^\mu}{\|x'\|}$, wobei $x' = \frac{dx(\sigma)}{d\sigma}$ ist.

p^0 ist die kinetische Energie/c und enthält die Ruheenergie.

Per Konstruktion ist die Norm konstant gegen als $p^2 = -m^2c^2 \Rightarrow E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$

für $\sigma = t$ gilt

$$p^\mu = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

Lorentz-Kraft

Die Lorentz-Kraft lässt sich schreiben als $c \frac{p'^\mu}{\|x'\|} = K_\mu = -\frac{q}{m} F_{\mu\nu} p^\nu$

Sie ist unabhängig von der Parametrisierung

wegen $p^2 = -m^2c^2 = \text{konst}$ gilt $K_\mu p^\mu = 0$

$K^0 = \frac{q}{c} \vec{E}\cdot\vec{v}$ also Leistung/c

Mit $\sigma = t$ folgt $\dot{\vec{p}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

und $c\dot{p}^0 = q\vec{E}\vec{v}$

Für $\rho = \vec{j} = 0$ gilt $\Box \vec{B} = \Box \vec{E} = 0$, wobei der D'Alembert-Operator $\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2$

Fast. Fk. Freie Wellen

Ebene Wellen

Eine Ebene Welle ist ein skalares Feld $\Psi(x,t)$, s.d. $\Box\Psi = 0$ und $\Psi(x,t) = \Psi(x\vec{n},t)$

Die allg. Lösung der Wellengl. hat die Form $\Psi(\vec{x}\cdot\vec{n},t) = \Psi_+(\vec{n}\cdot\vec{x}+ct) + \Psi_-(\vec{n}\cdot\vec{x}-ct)$

Monochromatische Wellen

Monochromatische Wellen sind $\Psi(x,t) = \exp(i\vec{k}\vec{x} - i\omega t)$ wobei $\vec{k} = \|\vec{k}\|\vec{n}$ die Wellenzahl und $\omega = \pm\|\vec{k}\|c$ die Kreisfrequenz ist.

Es gelten folgende EW-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\Psi = i\vec{k}\Psi \quad \text{und} \quad \partial_t\Psi = -i\omega\Psi$$

$$\rightarrow \omega^2 = c^2\vec{k}^2, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Da diese Monochromatischen Wellen komplex sind, muss für physikalische, reelle Welle gelten

$$\Psi = 2\,\mathrm{Re}[A\exp(i(\vec{k}\vec{x}-\omega t))] = 2\,\mathrm{Re}(A)\cos(\vec{k}\vec{x}-\omega t) - 2\,\mathrm{Im}(A)\sin(\vec{k}\vec{x}-\omega t)$$

Fourier-Transformation

Da die Wellengleichung linear ist, sind Linearkombinationen von verschiedenen monochrom. Wellen mögliche Lösungen

$$\Psi(x,t) = \sum_j [A_j\exp(i(\vec{k}_j\vec{x}-\omega_j t)) + A_j^*\exp(-i(\vec{k}_j\vec{x}-\omega_j t))]$$

Beim Übergang in kontinuierliche Werte wird aus

$$\Psi(x,t) = \int\frac{d\vec{k}^3}{(2\pi)^3}\left[A(\vec{k})\exp(i(\vec{k}\vec{x}-\|\vec{k}\|ct)) + A^*(\vec{k})\exp(-i(\vec{k}\vec{x}-\|\vec{k}\|ct))\right]$$

↳ für allg. Lösungen können $A(\vec{k})$ und $A^*(\vec{k})$ als unabhängig betrachtet werden. Für reelle Lösungen müssen sie komplex konjugiert sein.

Konvention

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{i\omega t}\hat{F}(\omega)$$

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}dt\,e^{-i\omega t}F(t)$$

$$\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{2\pi}e^{-i\omega t}$$

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,e^{i\omega t}$$

$$(\hat{F})^\vee = F$$

Fourier-Transformierte Welle

$$\hat{\Psi}(k,\omega) = 2\pi\delta(\omega - \|k\|c)A(k) + 2\pi\delta(\omega + \|k\|c)A^*(-k)$$

Die Wellengleichung $\Box\Psi = 0$ lässt sich mittels FT zu einer algebraischen Gleichung umschreiben

$$\Box\Psi = 0 \xleftrightarrow{FT} \left[-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right]\hat{\Psi} = 0$$

D.h. $\hat{\Psi} = \begin{cases} \text{Gelöst} & \text{bei } \omega = \pm\|k\|c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Polarisation

Für die Welle, die sich in $\vec{n}$-Richtung ausbreitet gilt $\vec{n}\perp\vec{E}\perp\vec{B}$, mit $\vec{E}\times\vec{B}\parallel\vec{n}$

insbesondere gilt $\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}$, $\vec{n}\cdot\vec{B} = \vec{n}\cdot\vec{E} = 0$

Monochromatische Polarisation

Sei $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ ein ON-System mit $\vec{k} = \|k\|\vec{n}_3$

Dann gilt für $\vec{E}, \vec{B} \propto \exp(i(\vec{k}\vec{x} - \|k\|ct))$, dass

$$\vec{E} = \mathrm{Re}[(a_1\vec{n}_1 + a_2\vec{n}_2)\exp(i(\vec{k}\vec{x} - \|k\|ct))]$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\mathrm{Re}[(a_1\vec{n}_2 - a_2\vec{n}_1)\exp(i(\vec{k}\vec{x} - \|k\|ct))]$$

wobei $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$

Bem
- Rotation in $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ Ebene → Rot von a_1, a_2
- Translation in Raum/Zeit → Phase
- Skalierung der Amplituden → Skalierung von a_1, a_2

D.h. wir können (a_1, a_2) transformieren auf $(a_1, a_2) \leftrightarrow (1, i\alpha)$, $\alpha \in [-1, 1]$

Bsp:
- Lineare Polarisation $\alpha = 0$
- Zirkulare Polarisation $\alpha = \pm 1$
- elliptische Polarisation $\alpha \neq 0, \pm 1$

Bem: Bei a_1, a_2 geht es um Phase und die Ausrichtung.

Energietransport

Zirkulare Polarisation

Wir finden $\varepsilon_0\vec{E}^2 = \varepsilon_0 E_0^2$, $\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2 = \varepsilon_0 E_0^2$

und $\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2\vec{n}_3}{c}$

D.h. die Welle hat räumlich und zeitlich konstante Energie- und Impulsdichte

$$\omega = \varepsilon_0 E_0^2, \quad \vec{\pi} = \frac{\varepsilon_0}{c}E_0^2\vec{n}_3 = \frac{\omega}{c}\vec{n}_3$$

Bem Energiedichte hat gleichen Anteile aus E- und B-Feld.

Die Energieflussdichte ist $\vec{S} = \varepsilon_0 c E_0^2\vec{n}_3 = \omega c\vec{n}_3$

Bem: D.h. die gesamte Feldenergie bewegt sich mit c entlang $\vec{n}_3$.

Der Spannungstensor ist somit $T = -c\vec{n}_3\vec{\pi}^T$

Lineare Polarisation

sei $\vec{E} = E_0\vec{n}_1\cos(k\vec{n}_3\vec{x} - \omega t)$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\vec{n}_2\cos(k\vec{n}_3\vec{x} - \omega t)$$

D.h. $\omega = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2(k\vec{n}_3\vec{x} - \omega t)$

$$\vec{\pi} = \frac{\omega}{c}\vec{n}_3, \quad \vec{S} = c\omega\vec{n}_3, \quad T = -c\vec{n}_3\vec{\pi}^T$$

Bem: all diese Größen hängen von ω ab, was wiederum zeitlich und räumlich abhängigkeit hat. Wir definieren also das zeitliche bzw räumliche Mittel

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

Bem: Die halben Energiedichte im Vergleich zur zirkulären lässt sich folgendermaßen erklären: zwei um $\frac{\pi}{2}$ verschobene Wellen entsprechen einer zirkulär polarisierten Welle.

Wellenpakete

Die bis anhin besprochenen Wellen sind allesamt unphysikalisch, da sie unendlich ausgedehnt sind. Physikalische Wellen müssen einen endlichen Ursprung und eine Quelle haben.

Realer sind Wellenpakete, wobei unendliche Wellen mit Funktion mit 'kompakten Träger' multipliziert werden.

z.B. Gaussches Wellenpaket (kl. kompakter Träger)

$$\Psi(x,t) \sim \mathrm{Re}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\Delta k^2(\vec{n}\vec{x} - ct)^2\right)\exp(ik_0(\vec{n}\vec{x} - ct))\right]$$

Wobei $\frac{1}{\Delta k}$ die charakteristische Breite ist

Für die FT gilt dann

$$\Psi(x,t) \sim 2\mathrm{Re}\left[\int\frac{dk}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(k-k_0)^2/\Delta k^2\right)\exp(ik(\vec{n}\vec{x} - ct))\right]$$

D.h. starke lokalisierte Pole bei k_0 mit charakteristischen Breite Δk.

Die Phasengeschwindigkeit $v_p = \frac{\omega}{\|k\|}$ ist die Geschwindigkeit einzelner Berge.

Die Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{d\omega}{d\|k\|}$ beschreibt die Geschwindigkeit des Pakets an sich.

Bem Ohne Dispersion gilt $\omega = kc$, d.h. $v_p = v_g = c$.

Bem Kausalität verlangt nur $v_g \leq c$ nicht $v_p \leq c$. Dies liegt daran, dass die Phase bzw eine Phase der Welle keine Information oder Energie trägt.

Analogie: Quelle •))) Bob Stella

Information ersten Stella & Bob gleichzeitig. Aber kein Informationsaustausch zwischen S&B, sowie zwischen Q&B + Q&S

Kugelwellen

Kugelwellen sind kugelsymmetrisch um einen Punkt.

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{r}\psi(r,t),$$

Die Wellengl. $\Box\Psi = 0$ wird damit zu

$$\partial_t^2\psi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi = 0$$

wobei die allg. Lösung geg. ist als

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{r}\psi_+(r+ct) + \frac{1}{r}\psi_-(r-ct)$$

Bem Der $\frac{1}{r}$ Faktor lässt sich mit z.B. Energieerhaltung erklären (Kugelfläche ist $4\pi r^2$) und Energieflussdichte ist in quadratischer Beziehung zu E/B-Wellen → $\frac{1}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi$

z.B. Monochromatische Kugelwellen sind

$$\Psi \sim \frac{1}{r}\exp(i\vec{k}\vec{x} - i\omega t)$$

und es gilt $\omega \sim \frac{1}{r^2}$, $\vec{S} \sim \frac{1}{r^2}\vec{n}$, $T \sim \frac{1}{r^2}\vec{n}\vec{n}^T$

Bem wie bereits erwähnt ist Energiefluss konst. ausgehend ist gesamtimpuls Null D.h. im Ursprung $(r=0)$ ist eine Energiequelle

Anfangswertproblem

Während wir in der Elektrostatik Randwertproblem hatten haben wir in der Elektrodynamik zusätzlich zeitlich abhängigkeit

Wir betrachten also das AWP die zeitlichen (weiter-) entwicklung der Felder in einem kompakten Gebiet.

Zunächst betrachten wir $\vec{E}(t=0), \vec{B}(t=0)$ mit $\rho(t) = 0 = \vec{j}(t)$

Randbed.: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

Zeitbed.: $\partial_t\vec{B} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}$, $\partial_t\vec{E} = c^2\vec{\nabla}\times\vec{B}$

Bem Die Energie $W = \int dx^3\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right)$ ist erhalten und positiv → beschränkte Amp.

Bem: Aus der Erhaltung der Energie und der Linearität, folgt, dass die Lösung eindeutig sein muss ⇒ ansatz $\Delta E \neq 0 \Rightarrow \Delta W \neq 0 \Rightarrow$ ↯

Fourier-Raum

Für allg. Lösungen im Fourierraum

$$\vec{E}(x,t) = \int\frac{d\vec{k}^3}{(2\pi)^3}\left[\vec{\alpha}(k)e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} + \vec{\alpha}^*(k)e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t}\right]$$

$$\vec{B}(x,t) = \int\frac{d\vec{k}^3}{(2\pi)^3}\left[\vec{\beta}(k)e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} + \vec{\beta}^*(k)e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t}\right]$$

Die Maxwellgleichungen darauf angewandt ergeben $\vec{k}\cdot\vec{\alpha} = \vec{k}\cdot\vec{\beta} = 0$, $\vec{\beta} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha} = -\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\times\vec{\beta}$

$$\vec{E}(x, t=0) = \int\frac{d\vec{k}^3}{(2\pi)^3}\vec{E}_0(k)e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad \vec{E}_0(k) = \vec{\alpha}(k) + \vec{\alpha}^*(-k)$$

$$\vec{B}(x, t=0) = \int\frac{d\vec{k}^3}{(2\pi)^3}\vec{B}_0(k)e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad \vec{B}_0(k) = \vec{\beta}(k) + \vec{\beta}^*(-k)$$

Wir finden

$$\vec{\alpha}(k) = \frac{1}{2}\vec{E}_0(k) - \frac{c^2}{2\omega}\vec{k}\times\vec{B}_0(k)$$

$$\vec{\beta}(k) = \frac{1}{2}\vec{B}_0(k) + \frac{1}{2\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0(k)$$

Bem: Mithilfe der FT können wir die DGL (Wellengleichung) in ein algebraisches Problem 'umwandeln'.

Ortsraum: Wir haben $\Box\Psi = 0$, $\Psi(x, t=0) = \Psi_0(x)$

$\dot{\Psi}(x, t=0) = \dot{\Psi}_0(x)$ gegeben. (AWP

Ansatz: $\Psi(x,t) = \int dy^3\left[\partial_t D(x-y,t)\Psi_0(y) + D(x-y,t)\dot{\Psi}_0(y)\right]$

Beim vergleichen mit der Allg. Lösung im Fourierraum finden wir

$$D(x,t) = \int\frac{d\vec{k}^3}{(2\pi)^3}\frac{\sin(\omega t)}{\omega}e^{i\vec{k}\vec{x}} = \frac{1}{4\pi rc}\left[\delta(r-ct) - \delta(r+ct)\right]$$

Greensche-Fkt

Wir betrachten die Wellengl. mit Quellterm. $\Box\Psi = -\rho$

Ansatz: $\Psi(x,t) = \int dy^3 ds\, G(x-y, t-s)\rho(y,s) + \Psi_{hom}(x,t)$

wobei $\Box G(x,t) = -\delta^3(x)\delta(t)$ erfüllt sein muss.

$$\Rightarrow G(x,t) := G_{ret}(x,t) = D(x,t) = \frac{1}{4\pi rc}\delta(r-ct)$$

Man sieht für $r \neq 0$ $\Box G_{ret} = 0$, $r = 0$ $\Box G_{ret} = -\delta^3(x)\delta(t)$

Bem: Retardiert meint davon, dass sich Effekt mit Lichtgeschw. ausbreiten und daher 'verspätet' sind. Aufgrund der Zeitumkehrinvarianz der ED muss auch $G_{av} = \frac{1}{4\pi rc}\delta(r+ct)$ als rein mathematische Lösung existieren.

Bem: Um G_{ret} herzuleiten kann man G als Inverse FT der FT auffassen

wobei $\hat{G} = \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$ ist und die Residuensatz anwenden.

Bem: Bei komplizierten Green'schen Funktion ist rein Nicht sinnvoll. Diese FT-Residuen methoden ist dann zielführender.

Elektrodynamik

Für Potentiale $\Phi, \vec{A}$ finden wir mit $\Box\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, $\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$, Lorentzeichung und verwendung von $G_{ret} = \frac{c}{4\pi r}\delta(r-ct)$ direkt

$$\Phi(x,t) = \int dy^3\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\|x-y\|}\rho\left(y, t - \frac{\|x-y\|}{c}\right)$$

$$\vec{A}(x,t) = \int dy^3\frac{\mu_0}{4\pi\|x-y\|}\vec{j}\left(y, t - \frac{\|x-y\|}{c}\right)$$

wir nennen diese Felder retardierte Potentiale

Bem: Bei einer relativistischen Formulierung ist die spezielle Konvention $G_{ret}(x) = \frac{1}{4\pi r}\delta(r-ct)$.

Strahlung oszillierender Ladungen

Wir betrachten im folgenden dynamische Probleme, bei denen die räumliche ausdehnung der Quellterme deutlich kleiner als die Distanz zu der Quellterm ist. D.h. $r \gg d$

Bem: Je nachdem wie das Verhältnis $r : \lambda$ Wellenlänge ist, können wir verschiedene vereinfachungen machen

Bem: Da das Problem linear ist betrachten wir nur Monochromatische Welle als Lösungen. Allg. Lösungen sind lin. kombi.

Allgemein (Zeit $t = 0$)

$$\Phi(x) = \int dy^3\frac{\rho(y)}{4\pi\varepsilon_0\|x-y\|}e^{i\|x-y\|k}$$

$$\vec{A}(x) = \int dy^3\frac{\mu_0\vec{j}(y)}{4\pi\|x-y\|}e^{i\|x-y\|k}$$

Man findet wegen der Lorenz-Eichung

$$\Phi = -i\frac{c^2}{\omega}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}, \quad \vec{E} = i\omega\vec{A} + i\frac{c^2}{\omega}\nabla(\nabla\vec{A})$$

Far-Field ($\|x\| = r \gg d > \|y\|$, $r \gg \lambda \sim \frac{1}{k}$)

Für $r \to \infty$ erhalten wir mit Taylor

$$A(x) = A_{as}(x) + O\left(\frac{e^{ikr}}{r^2}\right) \quad \text{mit}$$

$$\vec{A}_{as}(x) = \int dy^3\frac{\mu_0\vec{j}(y)}{4\pi r}e^{ikr}e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{y}}$$

Es folgt für die Abstrahlungsleistungsfluss

$$\frac{d^2P}{d\Omega^2} := r^2\vec{n}\cdot\vec{S} = \frac{ck^2r^2}{2\mu_0}\left(\|A\|^2 - |\vec{n}\cdot\vec{A}|^2\right) + O(1/r)$$

wobei $\vec{B} = ik\vec{n}\times\vec{A} + O\left(\frac{e^{ikr}}{r^2}\right)$, $\vec{E} = ikc(\vec{A} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{A})) + O\left(\frac{e^{ikr}}{r^2}\right)$

Bem: Physikalisch ist klar, dass nur Energieabstrahlung $\frac{d^2P}{d\Omega^2} \sim \frac{1}{r^2}$

Multipolentwicklung

weiter können wir $e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{y}}$ entwickeln und erhalten

$$\vec{A}_{as}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r}e^{ikr}\int dy^3\vec{j}(y)\left(1 - ik\vec{n}\cdot\vec{y} + \dots\right)$$

wir finden $\int dy^3\vec{j}(y) = -ik\dot{\vec{P}}$, wobei $\vec{P} = \int dx^3\rho(x)\vec{x}$ das Dipolmoment ist.

Weiter finden wir

$$\vec{A}_{as}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r}e^{ikr}\left[-ikc\dot{\vec{P}} - ik\dot{\vec{M}}\times\vec{n} - \frac{1}{6}k^2c\dot{R}\vec{n} + \dots\right]$$

mit el. Quadrupoltensor $R = \int dx^3(3\vec{x}\vec{x}^T - \vec{x}^2)\rho$ und Magnetischen Dipolmoment $\vec{M} = \frac{1}{2}\int dx^3\vec{x}\times\vec{j}$

Für einen rein el. Dipol finden wir

$$\frac{d^2P}{d\Omega^2} = \frac{c^3k^4\mu_0}{32\pi^2}\left(\|\dot{\vec{P}}\|^2 - |\dot{\vec{P}}\cdot\vec{n}|^2\right) + \dots$$

$$= \frac{c^3k^4\mu_0}{32\pi^2}\sin^2\theta\,\|\dot{P}\|^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{ck^4\|\dot{P}\|^2}{12\pi\varepsilon_0}$$

Bem: In Form Strahlungsprofilen gilt, dass die Länge der Pfeile innerhalb des Bereichs (abhängig von θ) entsprechend der Leistungsdichte

Bem: Im allg ist $\vec{P} \in \mathbb{C}^2$ weshalb Kugelfläche gekannt werden müssen. (?)

Bem: Streuung von mag. Dipolen sieht man anstrahlen gutes aus. Es ist also aufgrund der Streuung nicht möglich auf die Quelle rückzuschliessen.

Nahzone ($d < r \ll \lambda$)

$$\vec{A}(x) = \int dy^3\frac{\mu_0\vec{j}(y)}{4\pi\|x-y\|}e^{i\|x-y\|k} \approx \int dy^3\frac{\mu_0\vec{j}(y)}{4\pi\|x-y\|}$$

Bem: Es erhalten hier die Retardierung effekt. Im Wesentlichen haben wir hier Elektrostatik

Bsp (Lineare Antenne)

$$\vec{j}(x) = I\vec{e}_z\sin(kd - k|z|)\delta(x)\delta(y) \quad |z| < d$$

$$\Rightarrow \vec{A}_{as}(x) = \frac{\mu_0\vec{e}_z I}{4\pi r}e^{ikr}\int_{-d}^{d}dz\,e^{-ikz\cos\theta}\sin(kd - k|z|)$$

$$= \frac{\mu_0 I\vec{e}_z}{4\pi r}e^{ikr}\frac{2}{k}\frac{\cos(kd\cos\theta) - \cos(kd)}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2P}{d\Omega^2} = \frac{c\mu_0}{8\pi^2}\left(\frac{\cos(kd\cos\theta) - \cos(kd)}{\sin\theta}\right)^2$$

Beschleunigte Punktladungen

Wir betrachten $\rho(x,t) = q\delta^3(x - y(t))$ und somit $\vec{j}(x,t) = q\dot{\vec{y}}(t)\delta^3(x - y(t))$

$$\Phi(x,t) = \int dt'\frac{cq}{4\pi\varepsilon_0\|x - y(t')\|}\delta(\|x - y(t')\| - c(t - t'))$$

$$\vec{A}(x,t) = \int dt'\frac{cq\mu_0\dot{\vec{y}}(t')}{4\pi\|x - y(t')\|}\delta(\|x - y(t')\| - c(t - t'))$$

Diese Defaltation wird ausgewertet bei $t' = s(x,t)$, wobei $\|x - y(s)\| = c(t - s)$ implizit definiert ist. s ist die retardierte Zeit, d.h. die Zeit zu der etwas gesehen muss, dass es bei x, t wahrgenommen wird. (Wobei auskunft mit Lichtgeschwindigkeit eigen wird) Für $v < c$ hat s eine eindeutige Lsg.

Bem: Bei Überlichtgeschw. haben wir Tscherenkov Strahlung (optisches Analog zu Machschen Kegeln)

Bem: Aus der Integration $\delta(f(t'))$ folgen Faktor $\frac{1}{|f'(s)|}$.

Mit retardierten Abstand $r(x,t) = \|x - y(s)\|$ Richtung $\vec{n}(x,t) = \frac{x - y(s)}{r}$, $\vec{v}(x,t) = \dot{\vec{y}}(s)$ und $h(x,t) = 1 - \frac{\vec{n}\vec{v}}{c}$ erhalten wir

Liénard-Wiechert Potentiale

$$\Phi(x,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 rh}, \quad \vec{A}(x,t) = \frac{\mu_0 q\vec{v}}{4\pi rh}$$

Bem: Im statischen Fall erhalten wir Coulomb Potential mit $\vec{A} = 0$, $0 < h < 2$

EM-Felder

Mit $\partial_t s = \frac{1}{h}$, $\vec{\nabla}s = -\frac{\vec{n}}{ch}$ können wir $\vec{E}$ & $\vec{B}$ bestimmen.

Spezialfall ($v = 0$)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi rc}\vec{n}\times\vec{a}$$

$$\vec{E} = \frac{q\vec{n}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{\mu_0 q}{4\pi r}(\vec{a} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{a}))$$

Bem: wir sehen, dass $E, B \propto \frac{1}{r}$ und daher $\vec{S} \propto \frac{1}{r^2}$

Bem: Für $v \neq 0$ gibt es auch eine Formel im Skript.

Strahlung ($v = 0$)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{q^2\mu_0}{16\pi^2c^2}\left[\vec{n}(\vec{a}^2 - (\vec{n}\cdot\vec{a})^2) + \frac{c^2}{r}(\vec{a} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{a}))\right]$$

Bem: Nur der erste Term ist Strahlung. Der zweite $\propto \frac{1}{r^3}$ ist der Umordnung der Feldenergie zu zu schreiben.

Die radiale Strahlung ist $\vec{n}\cdot\vec{S} = \frac{q^2\mu_0 a^2}{16\pi c r^2}\sin^2\theta$

Bem: Diese Strahlung ist also wie beim Dipol mit adrse $\vec{a}$.

Die Gesamtleistung / Larmor-Leistung ist dann $P = \frac{\mu_0 q^2\vec{a}^2}{6\pi c}$

bzw für allg. Geschwindigkeiten

$$\frac{dP}{d\Omega^2} = \frac{q^2\mu_0}{16\pi^2c^3}\left[\vec{n}\times\left[(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c})\times\vec{a}\right]\right]^2$$

Bem: 3 relativistischen Formulierung

Die Maxwell-Gleichungen in Materie (Wahre)

$$\vec\nabla\cdot\vec D=\rho \quad , \vec\nabla\times\vec H-\partial_t\vec D=\vec J$$
$$\vec\nabla\cdot\vec B=0 \quad , \vec\nabla\times\vec E+\partial_t\vec B=0$$

Dabei gilt $\vec D=\varepsilon_r(\vec x)\varepsilon_0\vec E$, $\vec B=\mu_r(\vec x)\mu_0\vec H$ wobei die Materialkonstanten ε_r und μ_r im <u>linearen, isotropen Medium</u> Ort-unabhängig sind.

Erhaltene Größen

Energiedichte $w=\frac12\vec E\cdot\vec D+\frac12\vec H\cdot\vec B$

Energieflussdichte $\vec S=\vec E\times\vec H$

Impulsdichte $\vec\pi=\vec D\times\vec B$

Impulsflussdichte $T_{ij}=D_iE_j+B_iH_j-\frac12\delta_{ij}(\vec E\cdot\vec D+\vec H\cdot\vec B)$
(Maxwell'scher Spannungstensor)

Ebene Monochromatische Wellen

Wir finden analog zum Fall im Vakuum die Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$u=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=:\frac{c}{n} \quad \text{wobei } n\geq 1$$

Für den Ansatz $\vec E=\mathrm{Re}[\vec E_0e^{i(\vec k\vec x-\omega t)}]$ und $\vec B=\mathrm{Re}[\vec B_0e^{i(\vec k\vec x-\omega t)}]$ gilt, analog zum Fall im Vakuum

$$\|k\|=\frac{\omega}{u}=\frac{\omega}{c}n \quad , \vec k\perp\vec B_0\perp\vec E_0\perp\vec k \quad , \vec B_0=\frac1\omega\vec k\times\vec E_0$$

Daraus folgt für die gemittelten Werte

$$w=\frac{1}{2\mu_0c^2}\|\vec E_0\|^2n^2$$
$$\vec S=\frac{n}{\mu_0c}\frac{\vec k}{\|\vec k\|}\|\vec E_0\|^2$$

Dispersion

Wir haben $\vec D=\varepsilon_0\vec E+\vec P$ definiert, wobei $\vec P$ die Polarisation des Materials als Antwort auf das externe E-Feld ist.
Wegen Kausalität kann diese Veränderung nicht instantan reagieren. Diese Retardierung ist vor allem bei schnellen Änderungen im E-Feld relevant.

$$\vec D(t)=\int dt'\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r(t-t')\vec E(t') \Rightarrow \vec D(\omega)=\varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)\vec E(\omega)$$

Die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonst. führt zu einer Frequenzabhängigkeit der Wellengeschwindigkeit und damit auch zur Relation zwischen Wellenzahl und Frequenz $\|k\|=\frac{\omega}{c}n(\omega)\Leftrightarrow\omega(\|k\|)$

Wir nennen $\omega(\|k\|)$ die Dispersionsrelation, welche im allgemeinen nicht linear ist, weshalb man Phasen- und Gruppengeschwindigkeit unterscheiden muss. $v_{ph}=\frac{\omega(\|k\|)}{\|k\|}$, $v_{gr}=\frac{d\omega(\|k\|)}{d\|k\|}\leq c$

Stetigkeitsbedingungen EM-Wellen

Mithilfe von Maxwell und Gauss'schen Kästchen bzw Stokes'schen Schleifen finden wir

$\vec E_\parallel,\vec H_\parallel,\vec D_\perp,\vec B_\perp$ stetig

Alternativ $\vec n\times\Delta\vec E=\vec n\times\Delta\vec H=\vec n\cdot\Delta\vec D=\vec n\cdot\Delta\vec B=0$

Reflexion & Brechung

(Ein + Ref + Trans + Stetigkeit)

Wir können mit Huygens, oder Translationsinvarianz argumentieren, dass bei Grenzüberschreitung von Wellen gelten muss $\omega'=\omega$ und $\vec k'_\parallel=\vec k_\parallel$

D.h. Alle Felder schwingen mit $\sim\exp[i(\vec k_\parallel\vec x_\parallel-\omega t)]$

Mit bekannten $\vec k_\parallel$ lässt sich $\vec k_\perp$ mittels der Dispersionsrelation berechnen

$$\|k\|=\sqrt{\|\vec k_\parallel\|^2+\|\vec k_\perp\|^2}=\frac{\omega}{c}n$$ (zwei Lösungen für $k_\perp$ die ein/auslaufende Wellen repräsentieren)

Wir sehen direkt, dass $\vec k_\perp$ vom Material abhängt $\rightsquigarrow$ <u>Brechung</u>

Mit der Gleichheit der $k_\parallel$-Komponente findet man einfach <u>Snell</u>:

$$\sin\alpha_1\cdot n_1=\sin\alpha_2\,n_2$$

Transversale Moden

Aufgrund der Linearität können wir alle Wellen als Linearkombination von transversalen Elektrischen / Magnetischen Moden schreiben.
Dabei sind transversale E-Moden (TEM) Wellen, bei denen die E-Feld Komponente parallel zur Grenzfläche ist. Analog für TMM

TEM

$$E_1+E_2=E_3 \quad , E_2=\frac{\cos\alpha_1-n\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1+n\cos\alpha_3}E_1$$
$$E_3=\frac{2n\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1+n\cos\alpha_3}E_1$$

Energie Reflexionsrate: $R=\frac{\vec e_z\vec S_2}{\vec e_z\vec S_1}=\frac{\|E_2\|^2}{\|E_1\|^2}$
$$=\left(\frac{\cos\alpha_1-n\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1+n\cos\alpha_3}\right)^2$$

" Transmissionsrate: $T=\frac{\vec S_3\vec e_z}{\vec S_1\vec e_z}=\frac{n\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1}\frac{\|E_3\|^2}{\|E_1\|^2}$
$$=\frac{4n\cos\alpha_1\cos\alpha_3}{(\cos\alpha_1+n\cos\alpha_3)^2}$$

Es gilt offensichtlich $0\leq R,T\leq 1$, $R+T=1$

<u>TMM</u>: alles analog mit $E_i\to B_i$ aber das n steht jeweils bei $\cos\alpha_1$!

Brewster-Angle :)

Beim Einfallswinkel $\alpha_1=\arctan(n)$ steht die reflektierte Welle senkrecht zur transmittierten und für TM haben wir $R=0$ Yuhu

Totalreflexion

Beim Übergang von einem optisch dichten (grosses n) zu einem optisch dünnen Medium und dem Winkel α_1 s.d. $\sin\alpha_1>n$ hat Snell keine reelle Lösung.
Es folgt, dass die transmittierte Welle schnell, exponentiell abnimmt, d.h. es wird keine Energie transmittiert. $R=1$, aber mit Phasendifferenz abhängig von der Eindringtiefe.

Streuung an Materie

Streuung kann als Reflexion & Brechung an Inhomogenitäten im Material verstanden werden.

Streuquerschnitt

Wir gehen von einer ebenen Welle mit Wellenzahl k und Frequenz ω aus. Die abgestrahlte Welle sei dann in genügend grosser Entfernung Radial mit $E,B\sim\frac1r\Rightarrow S\sim\frac{1}{r^2}$
Dann beschreibt $r^2\vec S\cdot\vec e_r$ die abgestrahlte Energie in R-Richtung pro Zeit und Winkel.

Der differentielle Streuquerschnitt ist dann

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega}=\frac{d^2P_{aus}/d^2\Omega}{d^2P_{ein}/d^2A}$$

mit $\left[\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}\right]=\frac{\text{Fläche}}{\text{Raumwinkel}}$

Der totale Streuquerschnitt ist dann gegeben als $\sigma:=\oint d^2\Omega\,\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}$ und für ein Total reflektierendes Objekt genau der Fläche des Querschnitts im Strahlungsfluss

Dipolstreuung

Nehmen an die EM-Welle erzeugt E&M Dipolmomente im Objekt. D.h. wir haben Strahlung in Fernzone von

$$\vec A(\vec x)=\frac{\mu_0ck}{4\pi}\mathrm{Re}\left[(-ic\vec P-i\vec M\times\vec n)e^{ikr-i\omega t}\right]$$

Daraus folgt (siehe weiter hinten)

$$\frac{d^2P}{d^2\Omega}=\frac{ck^4\mu_0}{32\pi^2}\left(c^2\|P\|^2-c^2|\vec P\cdot\vec n|+\|M\|^2-|\vec M\cdot\vec n|^2\right)$$

Ich denke $\vec n$ zeigt hier an den Ort wo $\frac{d^2P}{d^2\Omega}$ zu messen ist. Falls wir zusätzlich nur die Polarisation ersten $\vec\varepsilon$, mit $\vec\varepsilon\cdot\vec n=0$, $|\vec\varepsilon|=1$ betrachten haben wir

$$\frac{d^2P_\varepsilon}{d^2\Omega}=\frac{ck^4\mu_0}{32\pi^2}\left[c^2|\vec P\vec\varepsilon|^2+|(\vec M\times\vec n)\cdot\vec\varepsilon|^2\right)$$

z.B. Dielektrischer Kugel $\Rightarrow$ nur Formeln

Inhomogenitäten (Rayleigh-Streuung)

Nehmen an $\varepsilon_r(x)=\bar\varepsilon_r+\delta\varepsilon_r(x)+\dots$, $\delta\varepsilon_r\ll\varepsilon_r$, $\mu_r=1$
D.h. auch $E=\bar E+\delta E(x)+\dots$, $D=\bar D+\delta D(x)+\dots$ etc.
Aus $D=\varepsilon_0\varepsilon_r(x)E$ folgt in erster Ordnung

$$\bar D=\varepsilon_0\bar\varepsilon_r\bar E \quad , \delta D=\varepsilon_0\delta\varepsilon_r(x)\bar E+\varepsilon_0\bar\varepsilon_r\delta E(x)$$

Wenn wir annehmen, dass die ursprünglichen Felder die Maxwellgleichungen erfüllen (obvi) ergibt sich

$$\vec\nabla\cdot\delta\vec B=0 \quad , \vec\nabla\times\delta\vec E+\partial_t\delta\vec B=0$$
$$\bar\varepsilon_r\vec\nabla\cdot\delta\vec E=-\vec\nabla(\delta\varepsilon_r\bar{\vec E})$$
$$\vec\nabla\times\delta\vec B-\varepsilon_0\bar\varepsilon_r\mu_0\partial_t\delta\vec E-\varepsilon_0\delta\varepsilon_r\mu_0\partial_t\bar{\vec E}=0$$

Daraus folgt

$$\delta\rho=-\varepsilon_0\vec\nabla\cdot(\delta\varepsilon_r\bar{\vec E}) \quad \text{und} \quad \delta\vec j=\varepsilon_0\delta\varepsilon_r\partial_t\bar{\vec E}$$

und sie erfüllen die Kontinuitätsgleichung $\partial_t\delta\rho=-\vec\nabla\cdot\delta\vec j$
Wir können $\delta\vec A$ als retardiertes Vektorpotential in der Fernzone konstruieren und erhalten

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}=\frac{k^4}{16\pi^2}|\vec\varepsilon_{ein}\cdot\vec\varepsilon_{aus}|^2\cdot F(\vec k)$$

mit dem Streufaktor
$F(\vec k)=|\delta\hat\varepsilon_r(\|k\|\vec e_z-\vec k)|^2$, wobei $\hat\varepsilon_r$ die FT ist.

Kontrollieren des Energietransports

EM-Wellen transportieren Energie. Um diesen Energietransport möglichst gut zu kontrollieren, verwenden wir el-Leiter, die das Feld umschreiben.

Wellen in Leitern

Strom ist proportional zu angelegtem Feld $\boxed{\vec j=\sigma\vec E}$ "Leiter"

Nehmen an der Leiter hat $\rho\neq0$, dann folgt

$$\partial_t\rho=-\vec\nabla\vec j=-\sigma\vec\nabla\vec E=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho\Rightarrow\rho(t)=\rho_0e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}$$

D.h. wir können O.B.d.A. dann ausgehen, dass $\rho=0$ (nach kurzer Zeit)
$\Rightarrow$ Ladung an Rändern des Leiters

Mit Kombination von zeitlicher Änderung von Ampere, rotation von Induktion und rot rot = grad div − Δ

$$\mu_0\sigma\partial_t\vec E=\dots=\Delta\vec E-\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec E)-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec E$$

mit $\vec\nabla\cdot\vec E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0$ erhalten wir die Telegraphengleichung $\Delta\vec E-\frac{1}{c^2}\partial_t\vec E-\mu_0\sigma\partial_t\vec E=0$

Diese wird gelöst durch Ebene Welle

$$\vec E=E_0e^{i\vec k\vec x-i\omega t} \quad , \text{wobei } \omega\in\mathbb{C},\vec k\in\mathbb{C}^3$$

und $-\vec k^2+\frac{\omega^2}{c^2}+i\omega\mu_0\sigma=0$ sein muss

$\boxed{\text{Zeitlich abklingende Welle}}$ $(k\in\mathbb{R}^3,\omega\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$

$\omega=\omega_r+i\omega_i$ mit $\omega_i<0$, damit die Welle nicht grösser wird (physikalisch)
~~Energie~~ $\to$ Wärme von Widerstand

$\boxed{\text{Räumlich abklingend}}$ $(\vec k=k\vec e_z,k\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\omega\in\mathbb{R})$

Wenn die Welle zeitlich immer die gleichen Amplituden haben soll, d.h. die Welle klingt räumlich ab. Achtung: geht nur, falls Leiter endlich ist (anstatt wächst er in die andere Richtung) $\Rightarrow$ exp abklingen der Welle vom Rand.

$$k=k_r+ik_i \quad , k_i=\mu_0\sigma\omega\frac{1}{2k_r} \quad , k_r^2=\frac{\omega^2}{2c^2}+\sqrt{\frac{\omega^4}{4c^4}+\frac14\mu_0^2\sigma^2\omega^2}$$

wobei k_i die Eindringtiefe ist.
Da die Felder hauptsächlich am Rand sind, fliesst auch dort Strom. (Skin-Effekt)

Wellenleiter

9. Seite: Stromhöse